Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 25. Mai 2016

6. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 16. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung $\partial u/\partial t = \Delta u$ auf $\Omega \times (0,T)$ mit homogenen Neumann-Randbedingungen $\partial u/\partial n = 0$ auf $\Gamma \times (0,T)$ und Anfangsbedingung $u(\cdot,0) = u_0$.

(a) Geben Sie die schwache Formulierung des Anfangs-Randwertproblems an. Was ist hier der Grundraum V, wie sieht die zugehörige Bilinearform a auf V aus? Ist diese V-elliptisch?

(b) Zeigen Sie die *Gårding'sche Ungleichung*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 - c|v|^2, \qquad \text{für alle } v \in V,$$

mit $\alpha > 0$, $c \geq 0$. Hierbei ist $\|\cdot\|$ die Norm von V und $|\cdot|$ jene von $H = L^2(\Omega)$. Geben Sie α und c an.

Übungsaufgabe 17. Überlegen Sie sich: Falls die Bilinearform in der schwachen Formulierung eines parabolischen Anfangs-Randwertproblems anstelle der V-Elliptizität die Gårding'sche Ungleichung erfüllt (siehe Aufgabe 15), so gelten alle Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen wie in der Vorlesung. Die Abschätzungen für die Lösung ändern sich nur durch einen zusätzlichen Faktor e^{ct} auf den rechten Seiten.

Hinweis: Formulieren Sie ein äquivalentes Problem für $w(x,t) = e^{-ct}u(x,t)$. Zeigen Sie die V-Elliptizität der zugehörigen Bilinearform.

Übungsaufgabe 18. Zeigen Sie unter den Voraussetzungen der Vorlesung: Die Lösung $u(t) \in V$ des homogenen parabolischen Problems $u' + Au = 0$ in V', $u(0+) = u_0$ in H, erfüllt für alle $t > 0$

$$Au(t) \in H \quad \text{und} \quad |Au(t)| \leq \frac{C_1}{t}|u_0|$$

und damit

$$\|u(t)\| \leq \frac{C_2}{\sqrt{t}}|u_0|,$$

mit von t und u_0 unabhängigen Konstanten C_1, C_2.

Übungsaufgabe 19. Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 18 gilt für die Zeitableitungen

$$|u^{(k)}(t)| \leq \frac{C_k}{t^k}|u_0|, \qquad \text{für } t > 0 \text{ und } k \geq 1.$$

Besprechung in den Übungen am 1. Juni 2016.