Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 4. Mai 2016

4. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 10. Sei $\big((a_{ij}),(b_i),(c_j)\big)$ ein algebraisch stabiles Runge–Kutta Verfahren, mit invertierbarem (a_{ij}) und der Eigenschaft (D) aus der Vorlesung, dass man auf $y' = f(t,y)$, welches die einseitige Lipschitz-Bedingung

$$\langle f(t,y) - f(t,\widetilde{y}), y - \widetilde{y}\rangle \leq \ell \|y - \widetilde{y}\|^2 \quad \forall t, y, \widetilde{y}$$

erfülle, anwendet. Betrachte dazu ein gestörtes RK-System

$$\widetilde{Y}_i = y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\widetilde{Y}_j' + \delta_i, \quad \widetilde{Y}_i' = f(t_0 + c_i h, \widetilde{Y}_i).$$

Zeigen Sie: Falls $h\ell \leq \frac{\alpha}{2}$ dann gilt

$$\|y_1 - \widetilde{y}_1\| \leq c\|\delta\|.$$

Übungsaufgabe 11. Sei $\big((a_{ij}),(b_i),(c_j)\big)$ ein algebraisch stabiles Runge–Kutta Verfahren, mit invertierbarem (a_{ij}) und der Eigenschaft (D) aus der Vorlesung, dass man auf $y' = f(t,y)$, welches die einseitige Lipschitz-Bedingung

$$\langle f(t,y) - f(t,\widetilde{y}), y - \widetilde{y}\rangle \leq \ell \|y - \widetilde{y}\|^2 \quad \forall t, y, \widetilde{y}$$

erfülle, anwendet. *Zeigen Sie:* Falls $h\ell \leq \frac{\alpha}{2}$, dann existiert eindeutig eine numerische Lösung des RKV.

Übungsaufgabe 12. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u' = C(t)u + d(t), \quad u(0) = 0 \in \mathbb{R}^d,$$

mit einer Matrix $C(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $t \in [0,T]$. Es gebe eine Matrix A sowie eine invertierbare Matrix B so, dass

$$\begin{aligned} &\|B^{-1}(C(t) - A)\| \leq l, && \text{für } 0 \leq t \leq T, \\ &\|(\lambda I - A)^{-1}B\| \leq m, && \text{für } \operatorname{Re}(\lambda) \geq c, \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|$ eine zu einer Skalarproduktnorm auf $\mathbb{R}^d$ gehörige Matrixnorm sei.
Zeigen Sie: Falls $ml < 1$, so gilt für die Lösung u

$$\left(\int_0^T \left\|e^{-ct}u(t)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \frac{m}{1-ml}\left(\int_0^T \left\|e^{-ct}B^{-1}d(t)\right\|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Besprechung in den Übungen am 11. Mai 2016.