Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 27. April 2016

3. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 7 (Umformulierung der nichtlinearen Gleichungssysteme bei RKV). Um den Einfluss von Rundungsfehlern zu reduzieren, definiert man $Z_i = Y_i - y_0$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} Z &= Y - \mathbb{1} \otimes y_0 = h(A \otimes I)F(Y), \\ y_1 &= y_0 + (d^T \otimes I)Z, \end{aligned}$$

wobei $d^T = b^T A^{-1}$, mit Bezeichnungen wie in der Vorlesung. Formulieren Sie hierfür das vereinfachte Newton-Verfahren.

Zeigen Sie, dass bei Radau-Verfahren $d = e_s$ gilt, also $y_1 = y_0 + Z_s$.

Übungsaufgabe 8. Zeigen Sie, dass s-stufige Gauß- und Radau-Kollokationsverfahren die Koerzivitätsbedingung

$$\exists\, D = \mathrm{diag}(d_i) > 0 : \exists\, \alpha > 0 : \langle u, A^{-1}u \rangle_D \geq \alpha \langle u, u \rangle_D, \quad \forall u \in \mathbb{R}^s,$$

erfüllen.

Hinweis: Betrachten Sie die Bedingungen

(1) $\quad \sum_{i=1}^s b_i c_i^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad 1 \leq k \leq p,$

(2) $\quad \sum_{j=1} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k}, \quad 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq k \leq q,$

für jeweils passende Wahlen von p und q sowie

$$D = B(C^{-1} - I_s) \qquad \text{bzw.} \qquad D = BC^{-1}$$

mit $B = \mathrm{diag}(b_i)$ und $C = \mathrm{diag}(c_i)$.

Übungsaufgabe 9 (Abbruchkriterium für die Newton-Iteration, Auswertung der Jacobi-Matrix). Das vereinfachte Newton-Verfahren konvergiert in der Regel linear: $\|\Delta Z^{(k+1)}\| \leq \theta \|\Delta Z^{(k)}\|$ mit einem θ, für das hoffentlich $\theta < 1$ gilt. Zeigen Sie, dass für den Fehler im $(k+1)$-ten Schritt

$$\|Z^{(k+1)} - Z\| \leq \frac{\theta}{1-\theta} \|\Delta Z^{(k)}\|$$

gilt (Hinweis: Dreiecksungleichung auf

$$Z^{(k+1)} - Z = (Z^{(k+1)} - Z^{(k+2)}) + (Z^{(k+2)} - Z^{(k+3)}) + \cdots$$

anwenden). Man kann θ nun durch $\theta_k = \|\Delta Z^{(k)}\| / \|\Delta Z^{(k-1)}\|$ schätzen. Da der Iterationsfehler nicht größer als der lokale Fehler und dieser $\approx$ `tol` sein soll, stoppt man die Newton-Iteration falls

$$\eta_k \|\Delta Z^{(k)}\| \leq \kappa \texttt{tol}, \quad \eta_k = \frac{\theta_k}{1-\theta_k}.$$

Damit man bereits nach dem ersten Schritt stoppen kann, verwendet man für $k = 0$ die Größe $\eta_0 = \max\{\eta_{old}, eps\}^{8/10}$, wobei eps die Maschinengenauigkeit ist. Eine gute Wahl für κ liegt bei 0.01 bis 0.1. Sie resultiert aus numerischen Tests. Zur Verbesserung der Effizienz begrenzt man die Anzahl der Newton-Schritte auf $k_{\max} = 7$ bis 10. Während dieser $k_{\max}$ Schritte wird die Berechnung unterbrochen und die Schrittweite h verkleinert (z.B. auf $h := h/2$), wenn es ein k mit $\theta_k \geq 1$ gibt (Divergenz) oder falls

$$\frac{\theta_k^{k_{\max}-k}}{1-\theta_k}\|\Delta Z^{(k)}\| > \kappa \cdot \texttt{tol}.$$

Überlegen Sie sich, dass die linke Seite dieses Ausdrucks eine grobe Schätzung des Fehlers nach $k_{\max} - 1$ Iterationen ist.

Tritt Konvergenz nach einem Schritt ein oder ist das letzte θ_k sehr klein, z.B. $\theta_k < 10^{-3}$, so berechnet man im nächsten Schritt keine neue Jacobi-Matrix sondern rechnet mit der aktuellen weiter.

Programmieraufgabe 2. Implementieren Sie das Radau5-Verfahren (Radau IIA der Ordnung 5) mit konstanter Schrittweite in Matlab, indem Sie die Umformulierung des nichtlinearen Gleichungssystems aus Aufgabe 6 und die Abbruchkriterien der Newtoniteration aus Aufgabe 7 realisieren. Das Programm soll eine Fehlermeldung ausgeben, wenn Divergenz vorliegt oder die Konvergenz nach k_{max} Iterationen nicht garantiert werden kann.
Testen Sie Ihr Programm an der van der Pol-Gleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ \varepsilon y_2' &= (1-y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned}$$

mit Anfangswert $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = -0.66$ für verschiedene Werte von ε und tol, z.B. $\varepsilon = 1e-6$.

Besprechung in den Übungen am 4. Mai 2016.
Abgabe der Programmieraufgaben bis zum 11. Mai 2016.