Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20. April 2016

2. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 4. Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion eines Runge–Kutta Verfahrens gilt:

$$R(z) = \frac{\det\bigl(I + z(\mathbb{1}b^T - A)\bigr)}{\det(I - zA)}.$$

Hinweis: $\det(I + wv^T) = 1 + v^T w$.

Übungsaufgabe 5. Zeigen Sie, dass das Runge–Kutta-Verfahren (Lobatto IIIC)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

A-stabil ist.

Übungsaufgabe 6. Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit symmetrisch verteilten Knoten:

$$c_i = 1 - c_{s+1-i}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt:

$$R(z) \cdot R(-z) = 1 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad \text{(mit Ausnahme der Pole).}$$

Insbesondere ist $|R(z)| \equiv 1$ auf der imaginären Achse.

Hinweis: Für $P = (e_s, \dots, e_1) \in \mathbb{R}^{s \times s}$ gilt $b = Pb$ und $A = \mathbb{1}b^T - PAP$.

Besprechung in den Übungen am 27. April 2016.