Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 13. April 2016

1. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 1. Zeigen Sie, dass Runge–Kutta- und Mehrschrittverfahren invariant unter linearen Transformationen $y = Tz$ sind. D.h., wenn man das Verfahren auf $y' = f(t, y)$ und auf $z' = T^{-1}f(t, Tz)$ anwendet mit Anfangsbedingungen

$$y_0 = Tz_0 \quad \text{(RKV)}, \qquad\qquad y_j = Tz_j, \quad j = 0, \ldots, k-1 \quad \text{(MSV)},$$

so gilt $y_n = Tz_n$ bzw. $y_{n+k} = Tz_{n+k}$ für alle $n \geq 0$.

Übungsaufgabe 2. Zeigen Sie: Ein s-stufiges explizites Runge–Kutta-Verfahren der Ordnung $p = s$ besitzt die Stabilitätsfunktion

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^s}{s!}.$$

R ist also unabhängig von den Koeffizienten a_{ij}, b_j, c_j des Runge–Kutta-Verfahrens.

Übungsaufgabe 3. Durch Semidiskretisierung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\ ,\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ ,\ u(x,0) = u_0(x) \quad (0 \leq x \leq 1\ ,\ t \geq 0)$$

erhält man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y' = Ay\ , \quad y(0) = y_0$$

mit

$$A = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & 0 & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \qquad (N+1)\Delta x = 1\ .$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Wie verhalten sich die Eigenwerte für $\Delta x \to 0$?

(b) Wie groß kann die Schrittweite h gewählt werden, so dass das explizite Euler-Verfahren stabil bleibt? Was geschieht bei größeren Schrittweiten? Dieselben Fragen zum impliziten Euler-Verfahren.

<u>Hinweis zu (a):</u> Für einen Eigenvektor $v = (v_1, \ldots, v_N)^T$ zum Eigenwert λ von A gilt

$$v_{n-1} - (2 + \lambda(\Delta x)^2) \cdot v_n + v_{n+1} = 0, \qquad (n = 1, \ldots, N),$$

wobei $v_0 = v_{N+1} = 0$. Daher (warum?) ist v_n Linearkombination der n-ten Potenzen der Wurzeln $z_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung $z^2 - (2 + \lambda(\Delta x)^2)z + 1 = 0$. Erinnern Sie sich an Vieta und schließen Sie, dass die Nullstellen konjugiert komplex und vom Betrag 1 sind.

(Ergebnis: $\lambda_k \cdot (\Delta x)^2 = -2 + 2\cos\frac{k\pi}{N+1}$, $k = 1, \ldots, N$)

Programmieraufgabe 1. Implementieren Sie das explizite und das implizite Euler-Verfahren, und wenden Sie die Verfahren auf das lineare System von Übungsaufgabe 3 an, indem Sie verschiedene Schrittweiten h und Dimensionen N wählen, so dass die Ergebnisse aus Übungsaufgabe 3 sichtbar werden.

Besprechung in den Übungen am 20. April 2016.