

**9. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen**

**Aufgabe 22:** (Charakteristische Gleichung bei Mehrschrittverfahren)

(a) Zeigen Sie durch Induktion nach  $j$ , dass für die Folge  $y_k = \zeta^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  gilt:

$$\nabla^j y_k = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j,$$

wobei  $\nabla^0 y_k = y_k$ ,  $\nabla^j y_k = \nabla^{j-1} y_k - \nabla^{j-1} y_{k-1}$  für  $j \geq 1$ .

(b) Zeigen Sie damit für implizite Adams-Verfahren:

$$\alpha(\zeta) = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right), \quad \beta(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=0}^k \gamma_j^* \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j,$$

wobei

$$\gamma_j^* = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s+1}{j} ds.$$

(c) Zeigen Sie für BDF-Verfahren (gegeben durch  $\sum_{j=1}^k j^{-1} \nabla^j y_{n+k} = h f_{n+k}$ ):

$$\alpha(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j, \quad \beta(\zeta) = \zeta^k.$$

**Aufgabe 23:** (Crank-Nicolson-Verfahren)

Eine Finite-Element-Diskretisierung im Raum und Verwendung der Mittelpunktsregel zur Zeitdiskretisierung eines parabolischen Problems ergibt das Schema:

Für  $n = 0, 1, 2, \dots$ , suche  $u_{n+1} \in V_h$  so, dass

$$\left( (u_{n+1} - u_n)/\tau, v \right) + a \left( (u_{n+1} + u_n)/2, v \right) = \left( f((t_{n+1} + t_n)/2), v \right), \quad \text{für alle } v \in V_h.$$

(a) In jedem Schritt führt dieses Verfahren auf ein lineares Gleichungssystem im  $\mathbb{R}^N$ . Geben Sie dieses an.

(b) Leiten Sie mittels "Energieabschätzungen" eine Stabilitätsungleichung für das Verfahren her.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 24:** (Crank-Nicolson-Verfahren)

Zeigen Sie, dass in der Situation von Aufgabe 23 für  $n\tau \leq T$  unter geeigneten Regularitätsannahmen (welchen?) die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} |u_n - u(t_n)| &\leq C(h^2 + \tau^2), \\ \left( \tau \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \frac{u_{j+1} + u_j}{2} - u\left(\frac{t_{j+1} + t_j}{2}\right) \right\|^2 \right)^{1/2} &\leq C(h + \tau^2) \end{aligned}$$

gelten.

**Besprechung in der Übung am 17.06.2014.**

Ansprechpartner: Bernd Brumm,

brumm@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung