Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 27.05.2014

8. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 20:

Es sei V ein separabler Hilbertraum mit der Norm $\|\cdot\|$ und dem zugehörigen Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Zeigen Sie: Für eine Folge von Fourier-Koeffizieten $\{u_n\}_n \subset V$ gegeben durch

$$u_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\varphi}\widehat{u}(\varphi)d\varphi, \qquad \widehat{u}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{in\varphi}$$

gilt die Parseval'sche Gleichung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\widehat{u}(\varphi)\|^2 d\varphi.$$

Aufgabe 21: (verallgemeinertes Gronwall-Lemma und diskretes Gronwall-Lemma)

(a) Es sei $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle für ein $\mu > 0$

$$0 \le f(t) \le M + L\int_0^t (t-s)^{\mu-1} f(s)\, ds\ , \quad 0 \le t \le T\ .$$

Zeigen Sie: Es gilt $f(t) \le CM$ für $0 \le t \le T$ mit einer Konstanten C, die nur von L, T und μ abhängt, wobei $M, L \ge 0$.

Hinweis: Unterscheiden Sie $\mu \ge 1$ von $\mu \in (0,1)$. Benutzen Sie im ersten Fall das spezielle Gronwall-Lemma. Im zweiten Fall hilft Ihnen die (lineare!) Faltung $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$ sowie der (nicht zu beweisende) Trick

$$\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} * \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} * \ldots * \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} * f = \frac{t^{m\mu-1}}{\Gamma(m\mu)} * f$$

mit der Euler'schen Gamma-Funktion, um sich auf den ersten Fall zurückzuziehen.

(b) Die Folge f_n, $n = 0, 1, \ldots, N$ erfülle für ein $\mu > 0$ und $\tau > 0$

$$0 \le f_n \le M + L\tau \sum_{j=0}^{n-1} ((n-j)\tau)^{\mu-1} f_j\,, \quad 0 \le n \le N\ .$$

Zeigen Sie: Es gilt $f_n \le CM$ für $0 \le n\tau \le T = N\tau$ mit einer Konstanten C, die nur von L, T und μ abhängt, wobei $M, L \ge 0$.

Hinweis: Definieren Sie eine geeignete stückweise konstante Funktion f und verwenden Sie Teil (a).

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 4 :

Realisieren Sie in Ihrer Implementierung des Radau5-Verfahrens die Schrittweitensteuerung aus Aufgabe 19. Testen Sie Ihr Programm wiederum an der van der Pol-Gleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ \varepsilon y_2' &= (1 - y_1^2) y_2 - y_1 \end{aligned}$$

mit Anfangswert $y_1(0) = 2, \; y_2(0) = -0.6$. Wählen Sie für $\hat{b}_0$ den reellen Eigenwert von A^{-1} und setzen Sie

$$\left(\hat{d}_1 - d_1, \hat{d}_2 - d_2, \hat{d}_3 - d_3\right) = \frac{\hat{b}_0}{3}\left(-13 - 7\sqrt{6}, -13 + 7\sqrt{6}, -1\right),$$

so dass das eingebettete Verfahren von vierter Ordnung ist. Eine für diese Aufgabe interessante Referenz ist:

> E. Hairer / G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, 2. Auflage, SpringerVerlag, Berlin/Heidelberg, Springer Series in Computational Mathematics 14, 2002, darin: Kapitel IV.8.

Integrieren Sie wiederum bis $t = 2$ und plotten Sie (am besten untereinander) für $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ und Start-Zeitschritt $h = 10^{-4}$ die erste Lösungskomponente sowie die gewählten Schrittweiten jeweils gegen die Zeit, letztere in semi-logarithmischer Skala. Sie können z.B. $Atol_i = Atol = Rtol_i = Rtol = 10^{-4}$ wählen. Mit den Befehlen `tic` und `toc` können Sie die CPU-Laufzeit messen. Vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit Ihrer Implementierung ohne Schrittweitensteuerung.

Besprechung in der Übung am 03.06.2014.
Abgabe der Programmieraufgabe am 17.06.2014.

Ansprechpartner: Bernd Brumm,
`brumm@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung