Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.05.2014

7. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 17:

Zeigen Sie unter den Voraussetzungen der Vorlesung: Die Lösung $u(t) \in V$ des homogenen parabolischen Problems $u' + Au = 0$ in V', $u(0+) = u_0$ in H, erfüllt für alle $t > 0$

$$Au(t) \in H \quad \text{und} \quad |Au(t)| \leq \frac{C_1}{t}|u_0|$$

und damit

$$\|u(t)\| \leq \frac{C_2}{\sqrt{t}}|u_0|,$$

mit von t und u_0 unabhängigen Konstanten C_1, C_2.

Aufgabe 18:

Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 17 gilt für die Zeitableitungen

$$|u^{(k)}(t)| \leq \frac{C_k}{t^k}|u_0|, \qquad \text{für } t > 0 \text{ und } k \geq 1.$$

Aufgabe 19: (Schrittweitensteuerung bei Runge–Kutta-Verfahren)

Zur Schrittweitensteuerung verwendet man ein eingebettetes Verfahren der Form

$$\widehat{y}_1 = y_0 + h\left(\widehat{b}_0 f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^{s} \widehat{b}_j Y_j'\right) = y_0 + \left(h\widehat{b}_0 f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^{s} \widehat{d}_j Z_j\right)$$

mit denselben Knoten c_i, aber mit niedrigerer Ordnung (bei Radau-Verfahren: Ordnung s). Damit gilt

$$\widehat{y}_1 - y_1 = h\widehat{b}_0 f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^{s} h(\widehat{b}_j - b_j)Y_j' = \left(h\widehat{b}_0 f(t_0, y_0) + \sum_{j=1}^{s}(\widehat{d}_j - d_j)Z_j\right).$$

Beachten Sie Aufgabe 8 zur Definition der Z_j und d_j.

(a) Machen Sie sich klar: Bei entsprechender Wahl der $\hat{d}_j$ gilt für den Fehler $err := \widehat{y}_1 - y_1$

$$\|err\| = Ch^{s+1} + O(h^{s+2}).$$

(b) Wendet man diese Fehlerschätzung allerdings bei der Testgleichung $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, für $h\lambda \to \infty$ an, so verhält sich die Fehlerschätzung wie $\widehat{b}_0 h\lambda y_0$ (warum?) und ist damit für steife Differentialgleichungen ungeeignet. Setzt man jedoch

$$err := (I - h\widehat{b}_0 J)^{-1}(\widehat{y}_1 - y_1), \tag{1}$$

so geht $err \to -y_0$ für $h\lambda \to \infty$, wobei $J = \lambda I$ die Jacobi-Matrix der Testgleichung sei. Im ersten und nach jedem verworfenen Schritt ($\|err\| > 1$) setzt man auf Kosten einer zusätzlichen Funktionsauswertung

$$\widehat{err} := (I - h\widehat{b}_0 J)^{-1}(h\widehat{b}_0 f(t_0, y_0 + err) + \sum_{j=1}^{s}(\widehat{d}_j - d_j)Z_j).$$

Dann gilt $\widehat{err} \to 0$ für $h\lambda \to \infty$, ebenso wie die numerische Lösung. Zeigen Sie diese Aussagen.

(c) Wie reguliert man nun die Schrittweiten? Für den Fehler (1) im n-ten Schritt (also zur Zeit t_{n+1}) gilt $\|err_{n+1}\| = C_n h_n^{s+1}$ (warum?). Unter der nicht immer realistischen Annahme $C_{n+1} \approx C_n$ ergibt sich aus einer Schätzung für err_{n+1} und der Forderung $\|err_{n+1}\| \approx 1$ die Schrittweite für den nächsten Schritt als

$$h_{new} := fac \cdot h_{old} \|err_{n+1}\|^{-1/(s+1)} \tag{2}$$

mit der gewichteten Norm

$$\|err_{n+1}\| = \sqrt{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{err_{n+1,i}}{sc_i}\right)^2}, \qquad sc_i = Atol_i + \max\{|y_{n,i}|, |y_{n+1,i}|\} Rtol_i.$$

und einem Faktor fac, der in Abhängigkeit von der maximalen Anzahl der Newton-Schritte $k_{\max}$ sowie der Anzahl $Newt$ der im aktuellen RK-Schritt bereits gemachten Newton-Schritte gegeben ist durch

$$fac = 0.9 \cdot \frac{2k_{\max} + 1}{2k_{\max} + Newt}.$$

Dabei sind $Atol_i$ und $Rtol_i$ zu wählende Toleranzen für den absoluten bzw. relativen Fehler. Im Falle $h_{new} < fac \cdot h_{old}$ folgt $\|err_{n+1}\| > 1$ (warum?), d.h. Schrittweitenreduktionen um mehr als fac sind nicht ohne Verwerfen des Schrittes möglich.

(d) Eine realistischere Annahme ist $C_{n+1}/C_n \approx C_n/C_{n-1}$. Zeigen Sie, daß aus $C_{n+1}h_{new}^{s+1} = 1$ als Anforderung an die neue Schrittweite folgt:

$$h_{new} := fac \cdot h_n \left(\frac{1}{\|err_{n+1}\|}\right)^{1/(s+1)} \cdot \frac{h_n}{h_{n-1}} \left(\frac{\|err_n\|}{\|err_{n+1}\|}\right)^{1/(s+1)}. \tag{3}$$

Eine mögliche Schrittweitenstrategie besteht zum Beispiel in der Wahl des Minimums aus (2) und (3).

Besprechung in der Übung am 27.05.2014.
Ansprechpartner: Bernd Brumm,
`brumm@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung