Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 06.05.2014

5. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 11:

Gegeben sei die parabolische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - a_0(x)u && \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0,T) \\ u &= u_0 && \text{in } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

Hierbei sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ mit stückweise stetig differenzierbarem Rand Γ. Die Koeffizientenfunktionen $a_{ij}, a_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ seien stetig,

$$\exists\, \alpha_0 \geq 0 : \forall x \in \Omega : a_0(x) > \alpha_0,$$

und die Matrizen $(a_{ij}(x))_{ij}$ seien symmetrisch und auf Ω gleichmäßig positiv definit, d.h.

$$\exists\, \alpha_1 > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \Omega : \sum_{i,j=1}^{d} \xi_i \xi_j a_{ij}(x) \geq \alpha_1 \xi^T \xi.$$

Geben Sie die schwache Formulierung des Anfangs-Randwertproblems an und weisen Sie nach, dass klassische Lösungen auch schwache Lösungen sind.

Aufgabe 12:

Sei $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Zeigen Sie: Falls die Eigenwerte von A im Innern des Kreisrandes Γ liegen, so gilt

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda I + A)^{-1}\, d\lambda.$$

Hinweis: Bringen Sie A auf Jordan'sche Normalform und beachten Sie, dass sich jedes Jordankästchen als $J = \mu I + N$ mit einer nilpotenten Matrix N schreiben lässt. Verwenden Sie die Cauchy'sche Integralformel und später die Neumann'sche Reihe.

Aufgabe 13:

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$u' = C(t)u + d(t), \qquad u(0) = 0 \in \mathbb{R}^d,$$

mit einer Matrix $C(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $t \in [0,T]$. Es gebe eine Matrix A sowie eine invertierbare Matrix B so, dass

$$\begin{aligned} &\|B^{-1}(C(t) - A)\| \leq l, && \text{für } 0 \leq t \leq T, \\ &\|(\lambda I - A)^{-1}B\| \leq m, && \text{für } \Re(\lambda) \geq c, \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|$ eine zu einer Skalarproduktnorm auf $\mathbb{R}^d$ gehörige Matrixnorm sei.
Zeigen Sie: Falls $ml < 1$, so gilt für die Lösung u

$$\left(\int_0^T \left\|e^{-ct}u(t)\right\|^2\,dt\right)^{1/2} \le \frac{m}{1-ml}\left(\int_0^T \left\|e^{-ct}B^{-1}d(t)\right\|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Programmieraufgabe 3 :

Implementieren Sie das Radau5-Verfahren (Radau IIA der Ordnung 5) mit konstanter Schrittweite in Matlab, indem Sie die Umformulierung des nichtlinearen Gleichungssystems aus Aufgabe 8 und die Abbruchkriterien der Newton-Iteration aus Aufgabe 9 realisieren. Das Programm soll eine Fehlermeldung ausgeben, wenn Divergenz vorliegt oder die Konvergenz nach k_{max} Iterationen nicht garantiert werden kann.
Testen Sie Ihr Programm an der van der Pol-Gleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ \varepsilon y_2' &= (1-y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned}$$

mit Anfangswert $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = -0.6$ für verschiedene Werte von ε und h. Integrieren Sie jeweils bis $t = 2$ und plotten Sie für $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ und $h = 10^{-4}$ die Approximation an y_1 gegen die Zeit.

Hinweis: Sie können z.B. wie folgt vorgehen:

- Schreiben Sie Funktionen

  `vanderPol_rechteSeite(epsilon,y)`

  und

  `jacobi(epsilon,y)`

  zur Berechnung der rechten Seite f der als System geschriebenen van der Pol-Gleichung $y' = f(\varepsilon, y)$ bzw. der zugehörigen Jacobi-Matrix, wobei $y = (y_1, y_2)^T$. Diese Funktionen benötigen Sie zur Berechnung der rechten Seite des Gleichungssystems in jedem Schritt der Newton-Iterationen bzw. zum einmaligen Aufstellen der Matrix des vereinfachten Newton-Verfahrens in jedem Radau-Schritt gemäß Aufgabe 8.

- Einen Radau-Schritt $t \longrightarrow t + h$ können Sie mit einer Funktion

  `[y_neu, eta_neu, h] = radau_schritt(epsilon,J,A,h,t,TOL,y_alt,eta_alt)`

  realisieren, wobei J die obige Jacobi-Matrix, A die Koeffizientenmatrix des Jacobi-Verfahrens, TOL die Newton-Toleranz und η wie in Aufgabe 9 definiert ist.

Besprechung in der Übung am 13.05.2014.
Abgabe der Programmieraufgabe am 03.06.2014.
Ansprechpartner: Bernd Brumm,
`brumm@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung