Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 29.04.2014

4. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 8: (Umformulierung der nichtlinearen Gleichungssysteme bei RKV)

Um den Einfluss von Rundungsfehlern zu reduzieren, definiert man $Z_i = Y_i - y_0$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} Z &= Y - 1 \otimes y_0 = h(A \otimes I)F(Y), \\ y_1 &= y_0 + (d^T \otimes I)Z, \end{aligned}$$

wobei $d^T = b^T A^{-1}$, mit Bezeichnungen wie in der Vorlesung. Formulieren Sie hierfür das vereinfachte Newton-Verfahren.

Zeigen Sie, dass bei Radau-Verfahren $d = e_s$ gilt, also $y_1 = y_0 + Z_s$.

Aufgabe 9: (Abbruchkriterium für die Newton-Iteration, Auswertung der Jacobi-Matrix)

(a) Das vereinfachte Newton-Verfahren konvergiert in der Regel linear: $\|\Delta Z^{(k+1)}\| \leq \theta \|\Delta Z^{(k)}\|$ mit einem θ, für das hoffentlich $\theta < 1$ gilt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall für den Fehler im $(k+1)$-ten Schritt

$$\|Z^{(k+1)} - Z\| \leq \frac{\theta}{1-\theta} \|\Delta Z^{(k)}\|$$

gilt.
<u>Hinweis:</u> Teleskopsumme für $Z^{k+1} - Z^{k+1+j}$, dann Dreiecksungleichung und $j \to \infty$.

(b) Man kann θ nun durch $\theta_k = \|\Delta Z^{(k)}\| / \|\Delta Z^{(k-1)}\|$ schätzen. Da der Iterationsfehler nicht größer als der lokale Fehler und dieser $\approx \texttt{tol}$ sein soll, stoppt man die Newton-Iteration, falls

$$\eta_k \|\Delta Z^{(k)}\| \leq \kappa \texttt{tol}, \qquad \eta_k = \frac{\theta_k}{1-\theta_k}.$$

Damit man bereits nach dem ersten Schritt stoppen kann, verwendet man für $k = 0$ die Größe $\eta_0 = \max\{\eta_{old}, eps\}$, wobei eps die Maschinengenauigkeit ist. Eine gute Wahl für κ liegt bei 0.01 bis 0.1. Sie resultiert aus numerischen Tests. Zur Verbesserung der Effizienz begrenzt man die Anzahl der Newton-Schritte auf $k_{\max} = 7$ bis 10. Während dieser $k_{\max}$ Schritte wird die Berechnung unterbrochen und die Schrittweite h verkleinert (z.B. auf $h := h/2$), wenn es ein k mit $\theta_k \geq 1$ gibt (Divergenz) oder falls

$$\frac{\theta_k^{k_{\max}-k}}{1-\theta_k} \|\Delta Z^{(k)}\| > \kappa \cdot \texttt{tol}.$$

Überlegen Sie sich, dass die linke Seite dieses Ausdrucks eine grobe Schätzung des Fehlers nach $k_{\max} - 1$ Iterationen ist.

Tritt Konvergenz nach einem Schritt ein oder ist das letzte θ_k sehr klein, z.B. $\theta_k < 10^{-3}$, so berechnet man im nächsten Schritt keine neue Jacobi-Matrix, sondern rechnet mit der aktuellen weiter.

Bitte wenden!

Aufgabe 10:

Zeigen Sie, dass s-stufige Gauß- und Radau-Kollokationsverfahren die Koerzivitätsbedingung

$$\exists\, D = \operatorname{diag}(d_i) > 0 : \exists\, \alpha > 0 : \langle u, A^{-1}u\rangle_D \geq \alpha\langle u, u\rangle_D, \quad \forall u \in \mathbb{R}^s,$$

erfüllen.
Hinweis: Betrachten Sie die Bedingungen

(1) $\quad \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad 1 \leq k \leq p,$

(2) $\quad \sum_{j=1} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k}, \quad 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq k \leq q,$

für jeweils passende Wahlen von p und q sowie

$$D = B(C^{-1} - I_s) \qquad \text{bzw.} \qquad D = BC^{-1}$$

mit $B = \operatorname{diag}(b_i)$ und $C = \operatorname{diag}(c_i)$.

Besprechung in der Übung am 06.05.2014.

Ansprechpartner: Bernd Brumm,
`brumm@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung