Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 22.04.2014

3. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass das Runge–Kutta-Verfahren (Lobatto IIIC)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

A-stabil ist.

Aufgabe 6:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = Ay + g(t, y),$$

wobei

- $\langle Av, v \rangle \leq \mu \|v\|^2$, für alle $v \in \mathbb{R}^d$,
- und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle.

Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h\left(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n)\right)$$

angewandt. Zeigen Sie: Falls $\mu + L \leq 0$, so sind sowohl die Differentialgleichung als auch das Verfahren kontraktiv.

Aufgabe 7:

(a) Zeigen Sie: Ein kontraktives Runge–Kutta-Verfahren ist A-stabil.

(b) Ist das folgende implizite Runge–Kutta-Verfahren kontraktiv?

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

<u>Hinweis:</u> A-Stabilität auf der imaginären Achse. Wie sieht die Stabilitätsfunktion aus?

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 2 :

(a) Visualisieren Sie die Stabilitätsbereiche der BDF-Verfahren der Ordnungen 2 bis 4. Leiten Sie dazu jeweils das charakteristische Polynom aus der Verfahrensvorschrift her und werten Sie dieses für Argumente auf dem Einheitskreis aus.

(b) Visualisieren Sie auch den Stabilitätsbereich des klassischen Runge–Kutta-Verfahrens der Ordnung 4. Leiten Sie die Stabilitätsfunktion her und benutzen Sie dann zum Beispiel den eingebauten Befehl `roots`.

Besprechung in der Übung am 29.04.2014.
Abgabe der Programmieraufgabe am 13.05.2014.

Ansprechpartner: Bernd Brumm,
`brumm@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung