

2. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 3:

Durch Semidiskretisierung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (0 \leq x \leq 1, t \geq 0)$$

erhält man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0$$

mit

$$A = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (N+1)\Delta x = 1.$$

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A . Wie verhalten sich die Eigenwerte für $\Delta x \rightarrow 0$?
- (b) Wie groß kann die Schrittweite h gewählt werden, so dass das explizite Euler-Verfahren stabil bleibt? Was geschieht bei größeren Schrittweiten? Dieselben Fragen zum impliziten Euler-Verfahren.

Hinweis zu (a): Für einen Eigenvektor $v = (v_1, \dots, v_N)^T$ zum Eigenwert λ von A gilt

$$v_{n-1} - (2 + \lambda(\Delta x)^2) \cdot v_n + v_{n+1} = 0, \quad (n = 1, \dots, N),$$

wobei $v_0 = v_{N+1} = 0$. Daher (warum?) ist v_n Linearkombination der n -ten Potenzen der Wurzeln $z_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung $z^2 - (2 + \lambda(\Delta x)^2)z + 1 = 0$. Erinnern Sie sich an Vieta.

(Ergebnis: $\lambda_k \cdot (\Delta x)^2 = -2 + 2 \cos \frac{k\pi}{N+1}$, $k = 1, \dots, N$)

Aufgabe 4: Gegeben sei ein Kollokationsverfahren mit symmetrisch verteilten Knoten:

$$c_i = 1 - c_{s+1-i}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion des Verfahrens gilt:

$$R(z) \cdot R(-z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \quad (\text{mit Ausnahme der Pole}).$$

Insbesondere ist $|R(z)| \equiv 1$ auf der imaginären Achse.

Hinweise: Seien A und b die Koeffizientenmatrix bzw. der Koeffizientenvektor des zugehörigen impliziten Runge–Kutta-Verfahrens und $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^T$. Zeigen und benutzen Sie

$$b = Pb, \quad A = \mathbb{1}b^T - PAP,$$

wobei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 & 1 \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

(folgt aus der Symmetrie der Knoten), und damit

$$R(z) = \frac{\det(I + z(\mathbb{1}b^T - A))}{\det(I - zA)}.$$

Programmieraufgabe 1 :

Implementieren Sie das explizite und das implizite Euler-Verfahren für das lineare System von Aufgabe 3. Testen Sie Ihre Implementierung mit

$$y_0 = \mathbb{1} \in \mathbb{R}^N, \quad N = 100, \quad h = 10^{-4}, \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}, \frac{2}{5} \cdot 10^{-4},$$

und vergleichen Sie die Approximationen zum Zeitpunkt $t = 0.1$ mit einer mittels BDF2 berechneten Referenzlösung. Implementieren Sie also auch das BDF2-Verfahren. Erklären Sie Ihre Beobachtung für die verschiedenen Wahlen von h .

Besprechung in der Übung am 22.04.2014.

Abgabe der Programmieraufgabe am 29.04.2014.

Ansprechpartner: Bernd Brumm,

brumm@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung