Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 08.07.2014

12. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

In den folgenden Aufgaben wird die Advektionsgleichung $u_t = cu_x$ für $x > 0$, $t > 0$ mit $c > 0$ diskretisiert (Ausströmrand bei $x = 0$).

Aufgabe 30:

Zeigen Sie, dass das Lax-Wendroff-Verfahren

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{c^2\tau}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{n^2}$$

mit der numerischen Randbedingung

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^{n-1}}{2\tau} = c\frac{u_1^n - u_0^n}{h}$$

instabil ist.

Aufgabe 31:

Bestimmen Sie den Phasenfehler des Lax-Wendroff-Verfahrens, d.h. geben Sie $\gamma(\alpha)$ an so, dass

$$G(\alpha) = |G(\alpha)| \exp(i\alpha\tau\gamma(\alpha)).$$

<u>Hinweis:</u> Zeigen Sie zunächst $\frac{\mathrm{Im}\ G(\alpha)}{\mathrm{Re}\ G(\alpha)} = \tan(\alpha\gamma(\alpha)\tau)$. Benutzen Sie dann eine Taylorentwicklung für das Argument von $\tan^{-1}$ sowie $\tan^{-1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$. Sie erhalten schließlich $\gamma(\alpha) = c\left(1 - \frac{1}{6}(h\alpha)^2(1 - r^2) + \mathcal{O}\left((h\alpha)^4\right)\right)$.

Aufgabe 32:

Zeigen Sie, dass das Leapfrog-Verfahren

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

mit der numerischen Randbedingung

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} = c\frac{u_1^n - u_0^n}{h}$$

stabil ist. Betrachten Sie dazu die zugehörigen Symbole

$$\begin{aligned} a(z,\xi) &= z - z^{-1} - r(\xi - \xi^{-1}), \\ b(z,\xi) &= z - 1 - r(\xi - 1) \end{aligned}$$

(mit der Courant-Zahl $r = c\tau/h$) und gehen Sie wie folgt vor:

(a) Für $|z| > 1$ gibt es genau eine Nullstelle $\xi_1(z)$ von $a(z,\xi) = 0$ vom Betrag kleiner 1 und für diese gilt $\lim_{z\to 1} \xi_1(z) = -1$.
<u>Hinweis:</u> Zeigen Sie, dass es für reelles $z \in (1,\infty)$ eine Nullstelle $\xi_1(z) \in (0,1)$ und eine Nullstelle $\xi_2(z) \in (1,\infty)$ gibt. Betrachten Sie dann $z = e^\alpha e^{i\varphi}$ und überlegen Sie, dass keine Nullstelle den Einheitskreis "kreuzt".

(b) Die Entwicklung

$$\frac{1}{b(z,\xi_1(z))} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad |z| > 1$$

hat eine beschränkte Koeffizientenfolge (b_n).
Hinweis: Überlegen Sie, dass $b(z,\xi_1(z)) \neq 0$ für $|z| > 1$. Stellen Sie dann $\frac{1}{b(z,\xi_1(z)}$ als Laurentreihe dar, deren Nebenteil verschwindet.

(c) Das Verfahren ist daher stabil.

Besprechung in der Übung am 15.07.2014.
Ansprechpartner: Bernd Brumm,
`brumm@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung