Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 17.06.2014

10. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 25:

Behandeln Sie die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ auf $[0, \pi]$ mit Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad u_t(x, 0) = v_0(x)$$

und mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$$

mittels Fourier-Reihen. Nehmen Sie dazu die exakte Lösung u als existent an und setzen Sie sie auf $[-\pi, 0]$ *gerade* fort. Zeigen Sie insbesondere: Falls u_0 und v_0 reell sind, so ist auch u eine reelle Funktion.

Aufgabe 26:

Betrachten Sie für die Differentialgleichung $u_t = c u_x$ das Lax-Friedrichs-Verfahren

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}[u_{j+1}^n + u_{j-1}^n]}{\tau} = c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

sowie das Lax-Wendroff-Verfahren

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{c^2 \tau}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{n^2}.$$

Bestimmen Sie für den Anfangswert $u(x, 0) = \exp(i\alpha x)$ jeweils den Wachstumsfaktor $G(\alpha)$ und untersuchen Sie auf von Neumann-Stabilität, d.h. formulieren Sie eine Bedingung an $c\tau/h$ so, dass $|G(\alpha)| \leq 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 5 :

Implementieren Sie die beiden Verfahren aus Aufgabe 26 für das eindimensionale Problem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= c u_x(x,t), && x \in [x_{\min}, x_{\max}],\ t > 0, \\ u(x,0) &= \alpha \exp(-\beta(x-\gamma)^2), && x \in [x_{\min}, x_{\max}]. \end{aligned}$$

- Wählen Sie als Randbedingungen

$$u(x_{\min}, t) = \alpha \exp(-\beta(x_{\min} + ct - \gamma)^2), \qquad u(x_{\max}, t) = \alpha \exp(-\beta(x_{\max} + ct - \gamma)^2).$$

- Experimentieren Sie mit verschiedenen Wahlen für α, β und γ und machen Sie sich die Bedeutung dieser Parameter klar, indem Sie die zugehörigen Lösungen plotten.
- Testen Sie auch die Auswirkung verschiedener Wahlen von c. In welche Richtung wird die Welle jeweils transportiert?
- Experimentieren Sie mit verschiedenen Wahlen von τ und h. Wann bleibt die numerische Lösung beschränkt?
- Zeigen Sie jeweils experimentell die Fehlerordnung bzgl. h, z.B. für $c = -0.5$, $\tau = \frac{1}{160}$ und

$$h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80},$$

  indem Sie bis $N\tau = t_{\text{end}} = 0.5$ integrieren und $\max_j |u(x_j, t_{\text{end}}) - u_j^N|$ betrachten. Geeignete Wahlen sind hierbei etwa

$$\alpha = 1, \quad \beta = 10, \quad \gamma = 0.2, \quad x_{\min} = 0, \quad x_{\max} = 1.$$

Besprechung in der Übung am 08.07.2014.
Abgabe der Programmieraufgabe am 15.07.2014.
Ansprechpartner: Bernd Brumm,
`brumm@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung