Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 10.05.2010

5. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen II

Aufgabe 15: (verallgemeinertes Gronwall-Lemma und diskretes Gronwall-Lemma)

(a) Es sei $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle für ein $\mu > 0$

$$0 \le f(t) \le M + L \int_0^t (t-s)^{\mu-1} f(s)\, ds \,, \quad 0 \le t \le T \,.$$

Zeigen Sie: Es gilt $f(t) \le CM$ für $0 \le t \le T$ mit einer Konstanten C, die nur von L, T und μ abhängt.

Hinweis: $\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} * \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} * \ldots * \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} * f = \frac{t^{m\mu-1}}{\Gamma(m\mu)} * f$ mit der Faltung $(f*g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$ und der Eulerschen Gamma-Funktion.

(b) Die Folge f_n, $n = 0, 1, \ldots, N$ erfülle für ein $\mu > 0$ und $\tau > 0$

$$0 \le f_n \le M + L\tau \sum_{j=0}^{n-1} ((n-j)\tau)^{\mu-1} f_j \,, \quad 0 \le n \le N \,.$$

Zeigen Sie: Es gilt $f_n \le CM$ für $0 \le n\tau \le T = N\tau$ mit einer Konstanten C, die nur von L, T und μ abhängt.

Hinweis: Definieren Sie eine stückweise konstante Funktion f und verwenden Sie Teil (a).

Aufgabe 16:

(a) Zeigen Sie durch Induktion nach j, dass für die Folge $y_k = \zeta^k$, $k = 0, 1, \ldots$ gilt

$$\nabla^j y_k = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j .$$

(b) Zeigen Sie damit für implizite Adams-Verfahren

$$\alpha(\zeta) = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \beta(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=0}^k \gamma_j^* \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

mit

$$\gamma_j^* = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s+1}{j} ds$$

und für BDF-Verfahren, gegeben durch $\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = h f_{n+k}$,

$$\alpha(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j , \qquad \beta(\zeta) = \zeta^k .$$

Programmieraufgabe 2 :

Implementieren Sie das Radau5-Verfahren (Radau IIA der Ordnung 5) mit konstanter Schrittweite in Matlab, indem Sie die Umformulierung des nichtlinearen Gleichungssystems aus Aufgabe 6 und die Abbruchkriterien der Newtoniteration aus Aufgabe 7 realisieren. Das Programm soll eine Fehlermeldung ausgeben, wenn Divergenz vorliegt oder die Konvergenz nach k_{max} Iterationen nicht garantiert werden kann.
Testen Sie Ihr Programm an der van der Pol-Gleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ \varepsilon y_2' &= (1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned}$$

mit Anfangswert $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = -0.66$ für verschiedene Werte von ε und tol, z.B. $\varepsilon = 1e - 6$.

Besprechung in den Übungen am 17.05.2010
Die Übungen finden jeweils montags von 16–18 Uhr im Raum C9G09 statt.