Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 07.12.2021

8. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 19:

Gegeben sei die Helmholtz-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \Gamma. \tag{$**$}$$

Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) u ist Lösung von $(**)$

(b) Es gilt

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) d(x,y) = \int_\Omega fv \; d(x,y) + \int_\Gamma gv \; d\sigma$$

für alle $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

(c) u ist Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2 \right] d(x,y) - \int_\Omega fv \; d(x,y) - \int_\Gamma gv \; d\sigma = \min!$$

unter allen $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Aufgabe 20:

Man definiert: $u \in L^2(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ (für $i = 1, \ldots, n$), falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$(\phi, \partial_i u)_0 = -(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, u)_0 \qquad \text{für alle } \; \phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \; .$$

Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1-Gebiete Ω:

(a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\partial u / \partial x_i$ eine schwache Ableitung.

(b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen (im Sinne der Vorlesung) schwache Ableitungen.

Es gilt (ohne, dass Sie es zeigen müssen): Falls die schwachen Ableitungen von $u \in L^2(\Omega)$ existieren, so sind sie verallgemeinerte Ableitungen und daher auch $u \in H^1(\Omega)$.

Aufgabe 21:

Seien V, W normierte Vektorräume und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$L \text{ stetig} \Longleftrightarrow L \text{ stetig in } 0 \Longleftrightarrow L \text{ beschränkt.}$$

Besprechung in der Übung am 14.12.2021.