Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 09.11.2021

4. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 8:

Gegeben sei ein 3-Punkt-Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} & y' = f(y) \\ & r(y(a), y(\tau), y(b)) = 0, \qquad a < \tau < b \end{aligned}$$

$y^\star$ sei eine Lösung dieses Problems. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $y^\star$ lokal eindeutig ist.

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in §2 der Vorlesung vor.

Aufgabe 9:

Formulieren Sie die Mehrzielmethode für das 3-Punkt Randwertproblem aus Aufgabe 8. Wie sehen die linearen Gleichungssyteme aus, die in jedem Schritt des Newton-Verfahrens zu lösen sind?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass τ ein Unterteilungspunkt ist.

Programmieraufgabe 2 : Implementieren Sie das Kollokationsverfahren aus Aufgabe 6 ($s = 1$, $c_1 = 1/2$) als Mehrzielmethode wie in Aufgabe 7 für das Randwertproblem

$$y'' + t^{-1}y' - 4t^{-2}y = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y(2) = 17/4.$$

Zerlegen Sie dabei $[1, 2]$ äquidistant in m Teilintervalle $[t_j, t_{j+1}]$, $0 \le j \le m - 1$. Testen Sie Ihr Programm mit $m = 2^i$, $1 \le i \le 6$, und ermitteln Sie jeweils $\max_{0 \le j \le m} |u(t_j) - y(t_j)|$, wobei u die jeweilige Approximation aus dem Kollokationsverfahren an die exakte Lösung y sei. Welche Konvergenzordnung stellen Sie fest? Geeignete Startwerte für $y(t_j)$ – ohne vorausgesetzte Kenntnis der Lösung – erhalten Sie z.B. durch lineare Interpolation (und für $y'(t_j)$ wählen Sie einfach 0).
Hinweis: Die exakte Lösung des Randwertproblems lautet $y(t) = t^2 + t^{-2}$.

Besprechung in der Übung am 16.11.2021.
Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens 23.11.2021, 12 Uhr.