Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.10.2021

2. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 3:

Zum Randwertproblem

$$y' = C(t)y + q(t), \qquad Ay(a) + By(b) = 0$$

betrachte man die Sensitivitätsmatrix

$$E(t) = AR(a,t) + BR(b,t) \qquad (a \le t \le b).$$

(a) Zeigen Sie: $E(t)$ ist für alle $t \in [a,b]$ invertierbar $\iff$ $E(t)$ ist für ein $t \in [a,b]$ invertierbar. Dies sei im folgenden erfüllt.

(b) Zeigen Sie: Die eindeutige Lösung des obigen Randwertproblems ist gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)q(s)ds$$

mit der Green'schen Funktion

$$G(t,s) = \begin{cases} E(t)^{-1}AR(a,s) & \text{für } a \le s \le t \le b \\ -E(t)^{-1}BR(b,s) & \text{für } a \le t \le s \le b. \end{cases}$$

Hinweis: Stellen Sie $y(t)$ als Summe der Lösung $v(t)$ des zugehörigen Anfangswertproblems mit Anfangswert $v(a) = 0$ und der Lösung $w(t)$ des zugehörigen homogenen AWPs mit geeignetem Anfangswert $w(0) = w_0$ dar.

(c) (Empfindlichkeit gegenüber Störungen der Inhomogenität)
Seien $y, \tilde{y}$ die Lösungen der Randwertprobleme

$$\begin{aligned} y' &= C(t)y + q(t), \qquad & Ay(a) + By(b) &= r \\ \tilde{y}' &= C(t)\tilde{y} + \tilde{q}(t), \qquad & A\tilde{y}(a) + B\tilde{y}(b) &= r. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\max_{a \le t \le b} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \le \gamma \max_{a \le t \le b} \|q(t) - \tilde{q}(t)\|$$

mit $\gamma = \max\limits_{a \le t \le b} \int_a^b \|G(t,s)\|\, ds \le (b-a) \max\limits_{a \le s,t \le b} \|G(t,s)\|$

Aufgabe 4:

(a) Schreiben Sie das Randwertproblem (mit reellem Parameter $\lambda \ne 0$)

$$u'' = \lambda^2 u, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

durch Einführen von $v = u'/\lambda$ in ein System 1. Ordnung um. Berechnen Sie dessen Resolvente und die Green'sche Funktion des Randwertproblems. Weisen Sie nach, dass für $\lambda \to +\infty$ die Resolvente wie e^{λ} wächst, wogegen die Green'sche Funktion unabhängig von λ beschränkt bleibt.

(Somit ist das Anfangswertproblem schlecht konditioniert, das Randwertproblem gut konditioniert.)

(b) Für welche Werte von $\omega \in \mathbb{R}$ ist das Randwertproblem

$$u'' = -\omega^2 u, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

eindeutig lösbar? Wir verhalten sich Resolvente des Anfangswertproblems und Green'sche Funktion des Randwertproblems für $\omega \to \pi$?

(Anfangswertproblem gut konditioniert, Randwertproblem schlecht konditioniert)

Hinweise: $R(t,s) = e^{C(t-s)}$, C diagonalisieren. $\lambda = i\omega$ in (b) erspart Ihnen Rechenarbeit.

Programmieraufgabe 1 :

Implementieren Sie das einfache Schießverfahren für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(t) &= \lambda \cdot (u(t))^2\,, \qquad t \in [a,b], \\ u(a) &= u_a, u(b) = u_b, \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Implementieren Sie zum Lösen des zugehörigen Anfangswertproblems in jedem Newton-Schritt (sowie zum Lösen der Anfangswertprobleme zur Bestimmung der im Newton-Verfahren benötigten Resolvente) das klassische Runge-Kutta-Verfahren.
- Berechnen Sie die in der Vorlesung definierten Matrizen A^k, B^k und C^k von Hand.
- Zum Lösen des linearen Gleichungssystems in jedem Newton-Schritt können Sie den eingebauten Matlab-Operator \ benutzen.
- Brechen Sie ab, sobald die Randbedingungen bis auf einen Fehler $< TOL$ erfüllt sind.

Testen Sie Ihr Programm mit $a = 0, b = 1$, $u_a = 0$, $u_b = 1$, $\lambda = 1/2$ und $TOL = 1e-7$. Verwenden Sie als Startwert $u'(0) = -5$. Plotten Sie die Trajektorie der gefundene Approximation an die Lösung gegen t. Vergleichen Sie diese mit den Trajektorien des zugehörigen Anfangswertproblems mit $u(0) = u_a, u'(0) = s$ und $s = -4, -12$.

Besprechung in der Übung am 02.11.2021.
Abgabe der Programmieraufgabe bis 09.11.2021, 12 h s.t.