Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 01.02.2022

14. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 38: Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) \qquad \text{in } (0,\pi), \\ u(0) &= u(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Zur Diskretisierung werden lineare Finite Elemente mit einer äquidistanten Unterteilung von $[0,\pi]$ in $(N+1)$ Teilintervalle der Länge h gewählt.

(a) Geben Sie die Matrizen A und M des zugehörigen Systems $A\mu = \lambda M\mu$ an.

(b) Die kontinuierlichen Eigenwerte und -vektoren lauten

$$\lambda_m = m^2, \qquad u_m(x) = \sin(mx), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Die diskreten Eigenwerte und -vektoren sind gegeben durch

$$\lambda_{m,h} = \frac{6}{h^2}\frac{1-\cos mh}{2+\cos mh}, \qquad u_{m,h} = \Pi_h u_m, \qquad m = 1, 2, \ldots, N.$$

Dabei bezeichnet $\Pi_h v = \sum_{n=1}^N v(nh)\varphi_n$ die stückweise lineare Interpolation in den Gitterpunkten mit der Finite Elemente-Basis $(\varphi_n)_{n=1}^N$. Verifizieren Sie dies und zeigen Sie die Abschätzung

$$\lambda_m - \lambda_{m,h} \leq C(m)h^2.$$

Aufgabe 39: Betrachten Sie das Anfangs-/Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u - \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \\ u &= u_0 && \text{für } t = 0 \end{aligned}$$

mit $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Falls eine klassische Lösung $u : \overline{\Omega} \times [0,T]$ existiert, so ist diese gegeben durch

$$u(\cdot,t) = \sum_{m=1}^\infty (u_0, w_m)e^{-\lambda_m t}w_m,$$

wobei λ_m und w_m die Eigenwerte bzw. $L_2(\Omega)$-orthonormalen Eigenvektoren des Laplace-Operators sind.
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x,t) = \varphi(t)w(x)$.

(b) Folgern Sie für bel. $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k}u(\cdot,t) \right\|_0 \leq C(t,k)\|u_0\|_0.$$

Was geschieht im Falle $t \to \infty$?

(c) Schlagen Sie numerische Verfahren zur Lösung dieses Problems vor.
Hinweis: Die Bearbeitung von Aufgabenteil (c) kann durch den Besuch der Vorlesung über die Numerik instationärer Differentialgleichungen im Sommersemester 2022 ersetzt werden.

Besprechung in der Übung am 08.02.2022.
Das Numerik-Team wünscht Ihnen viel Erfolg bei der Prüfung.