Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 25.01.2022

13. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 35: Sei $A = M - N$ eine Zerlegung der symmetrischen, positiv definiten Matrix A, und es sei auch N symmetrisch und positiv definit. Man zeige, dass die Iteration

$$x_{k+1} = x_k + M^{-1}(b - Ax_k)$$

konvergiert und dass die Eigenwerte der Iterationsmatrix reell sind und zwischen 0 und 1 liegen.

Aufgabe 36: Die Iteration im Zweigitter-Algorithmus kann in der Form

$$u_h^{(k+1)} = Mu_h^{(k)} + v_h$$

mit $v_h := (I - M)u_h$ geschrieben werden.

Geben Sie die Matrix M explizit an für den Fall, dass am Anfang der Iteration ν_1 und beim Nachglätten ν_2 Glättungsschritte durchgeführt werden. Zeigen Sie, dass der Spektralradius von M nur von der Summe $\nu_1 + \nu_2$ abhängt und nicht davon, wieviele Glättungsschritte a priori und wieviele a posteriori durchgeführt werden.

Aufgabe 37:

Sei H ein Hilbertraum, $T : H \to H$ kompakt. Zeigen Sie, falls $\dim H = \infty$, so ist $0 \in \sigma(T)$.
Hinweis: $\sigma(T)$ ist das Spektrum eines linaren Operators und definiert via $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ nicht bijektiv}\}$.

Programmieraufgabe 5 :

Lösen Sie das Problem aus Programmieraufgabe 4 mit einem Zweigitter- oder (wenn Sie möchten) mit einem Mehrgitterverfahren mit zwei Gauß-Seidel-Iterationen als Glättungsschritt. Benutzen Sie für die Restriktion und die Prolongation z.B. lineare Interpolation.

Alternativ können Sie auch das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

für das Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1]^2$, mit einem Zweigitter- oder (wenn Sie möchten) mit einem Mehrgitterverfahren mit finite Differenzen-Verfahren lösen. Benutzen Sie zwei Gauß-Seidel-Iterationen als Glättungsschritte. Benutzen Sie für die Restriktion und Prolongation z.B. lineare Interpolation (Hinweis: Was ist die Relation zwischen P und R^T?).

Zur Berechnung des diskreten Laplaceoperators, können Sie die folgende Matlab Funktion benutzen.

Als Beispiel können Sie das (unvollständige) Lösungsskript benutzen.

Bitte wenden!

```
function A=FD_SteifigkeitsMatrix(h)
% A - die Steifigkeitsmatrix die zum 5-Stern
%     finite Differenz approximation geh rt
% h - Gitterweite

% Anzahl von Knoten in eine Richtung die nicht auf dem Rand liegen
% (mit Rand n+2 x n+2 Grid)
n=1/h-1;

%% Steifigkeitsmatrix
% Hilfsvektor
e=ones(n,1);
% Hilfmatrizen
D=sparse(4*diag(e));
nD=spdiags([e 0*e e],[-1 0 1], n,n);
id=spdiags(e,[0], n,n);
% Steifigkeitsmatrix
A=1/h^2 * (kron(id,D-nD) + kron(nD,-id));
```

```
function PA4_script

h=1/32; % Gitterweite
n=1/h-1;
N=n^2; % Gr e des LGS

% Matrix
A=FD_SteifigkeitsMatrix(h);
% Lastvektor
b=ones(N,1);

% l\"osung des LGS
u=A\b;

%% Figure ohne Randwerten(!)
figure
surf(reshape(u,n,n))
```

Besprechung in der Übung am 01.02.2022.
Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens 08.02.2022, 12 Uhr.