Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 11.01.2022

11. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 29:

(a) Zeigen Sie für lineare Interpolation in den Ecken des Referenzdreiecks $\hat{K}$

$$\|v - \hat{\Pi}v\|_0 \le C\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(\hat{K})\ .$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$v(x) - v(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}v(tx)\,dt = Dv(x)x - \int_0^1 t\frac{d^2}{dt^2}v(tx)\,dt$$

und dieselbe Formel für $\hat{\Pi}v$.

(b) Zeigen Sie mittels (a) für die lineare Interpolation in den Ecken eines beliebigen Dreiecks K mit Durchmesser h

$$\|v - \Pi v\|_0 \le C\,h^2\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(K)\ ,$$

wobei C nicht von K abhängt.

Aufgabe 30:

(a) Zeigen Sie für bilineare Interpolation in den Ecken des Einheitsquadrats $\hat{K}$

$$|v - \hat{\Pi}v|_1 \le C\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(\hat{K})\ .$$

(b) Schließen Sie daraus für den Interpolationsfehler eines aus $\hat{K}$ affin erzeugten finiten Elements K mit Durchmesser h und Inkreisradius ρ :

$$|v - \Pi v|_1 \le C\,\frac{h^2}{\rho}\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(K)\ ,$$

wobei C nicht von K abhängt.

Aufgabe 31:

Das elliptische Variationsproblem $a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V$ mit $V \subset H^1(\Omega)$ werde durch ein Galerkin-Verfahren mit Approximationsraum $V_h \le V$, einer angenäherten Linearform $l_h : V_h \to \mathbb{R}$ und einer angenäherten Bilinearform $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ approximiert:

$$\text{Bestimme } u_h \in V_h \text{ mit } a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h\,.$$

Dabei seien die Bilinearformen a_h gleichgradig elliptisch, dass heisst mit einer von h unabhängigen Zahl $\alpha > 0$ gelte

$$\alpha \|w_h\|_1^2 \le a_h(w_h, w_h) \quad \forall w_h \in V_h\,.$$

Zeigen Sie für den Fehler (*Lemma von Strang*):

$$\|u-u_h\|_1 \le c\left(\inf_{v_h\in V_h}\left(\|u-v_h\|_1+\|a(v_h,\cdot)-a_h(v_h,\cdot)\|_*\right)+\|l-l_h\|_*\right),$$

wobei die Operatornorm $\|\cdot\|_*$ als $\|F\|_* = \sup_{0\neq w_h\in V_h}\frac{|F(w_h)|}{\|w_h\|_1}$ definiert ist.
Hinweis: Fangen Sie mit der gleichgradigen Elliptizität von a_h für $w_h = u_h - v_h$ an.

Programmieraufgabe 4 :

Lösen Sie mit Hilfe der finiten Elemente Methode das Problem

$$\begin{aligned} -d\Delta u + cu &= f \qquad \text{in} \qquad \Omega,\\ u &= 0 \qquad \text{auf} \qquad \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei das Gebiet Ω und die Parameter $d>0, c\ge 0$ wie folgt gegeben sind:

- Ω: Direkt als Triangulierung durch die Matrizen (`Elemente`, `Knoten`);
- $\partial\Omega$: Durch das Liste von Randknoten (`Rand`);
- f: Als eine Matlab Funktion (`func_f.m`).

Implementieren Sie eine Funktion `[A,M]=matrix_assembly(Elemente,Knoten)` zur Berechnung der Masse- und Stefigkeitsmatrix. Sie können dafür die Aufgaben 25, 26 und 27 benutzen. Den Lastvektor können Sie approximieren durch

$$\boldsymbol{b}|_j = \int_\Omega f\phi_j \approx \int_\Omega I_h f\phi_j = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{f})_j$$

Ein einfaches Beispiel – inklusive **M** und **A** und den Triangulierungen – finden Sie unter `https://na.uni-tuebingen.de/ex/num3_ws2122/PA4_FEM_Bsp.zip`.

(a) Lösen Sie nun mit Hilfe Ihrer Funktion `matrix_assembly` das lineare Gleichungssystem, welches zum obigen Problem gehört, wobei Ω der Einheitskreis ist. Eine Lösungsfunktion (func_Losung) und eine Inhomogenitäts Funktion (func_f) sind als m-File gegeben.

Rechnen Sie die Fehler der numerischen Lösungen für verschiedene Gitter aus. Die Triangulierungen für den Einheitskreis sind in den txt-files

`Elemente_test_j.txt`
`Knoten_test_j.txt` $\qquad j = 1,2,3,4$

gegeben. Sie finden diese ebenfalls unter `https://na.uni-tuebingen.de/ex/num3_ws2122/PA4_FEM_Bsp.zip`.

(b) Berechnen Sie die Fehler in der L^2 Norm und der H^1 Seminorm durch:

$$\begin{aligned} \|e_h\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|\boldsymbol{e}\|^2_{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{e},\\ \|\nabla e_h\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|\boldsymbol{e}\|^2_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} \end{aligned}$$

und plotten Sie diese.

Besprechung in der Übung am 18.01.2022.
Abgabe der Programmieraufgabe bis spätestens Dienstag, den 25.01.2022, 12 Uhr.