

## 7. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

### Aufgabe 17:

Gegeben sei die Helmholtz-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \quad (*)$$

Zeigen Sie für  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a)  $u$  ist Lösung von (\*)

(b) Es gilt

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) d(x, y) = \int_{\Omega} f v d(x, y) + \int_{\Gamma} g v d\sigma$$

für alle  $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

(c)  $u$  ist Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v^2 \right] d(x, y) - \int_{\Omega} f v d(x, y) - \int_{\Gamma} g v d\sigma = \min!$$

unter allen  $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

### Aufgabe 18:

Man definiert:  $u \in L^2(\Omega)$  hat die *schwache Ableitung*  $\partial_i u$  (für  $i = 1, \dots, n$ ), falls  $\partial_i u \in L^2(\Omega)$  und

$$(\phi, \partial_i u)_0 = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, u \right)_0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

Zeigen Sie für beschränkte stückweise  $C^1$ -Gebiete  $\Omega$ :

(a) Für  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  ist die klassische Ableitung  $\partial u / \partial x_i$  eine schwache Ableitung.

(b) Für  $u \in H^1(\Omega)$  sind die verallgemeinerten Ableitungen (im Sinne der Vorlesung) schwache Ableitungen.

Es gilt (ohne, dass Sie es zeigen müssen): Falls die schwachen Ableitungen von  $u \in L^2(\Omega)$  existieren, so sind sie verallgemeinerte Ableitungen und daher auch  $u \in H^1(\Omega)$ .

### Aufgabe 19:

Seien  $V, W$  normierte Vektorräume und  $L : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$L \text{ stetig} \iff L \text{ stetig in } 0 \iff L \text{ beschränkt.}$$

### Besprechung in der Übung am 14.12.2017.

Ansprechpartner: Balázs Kovács,

kovacs@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunden: Di 13–14, Do 10–12.