Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 22.11.2017

5. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 11:
Helfen Sie Leibniz und Bernoulli: Leiten Sie (anachronistisch) die Kettenlinie durch Minimierung der potentiellen Energie her. Was genau ist zu minimieren? Wie lauten die Euler'schen Gleichungen?

Aufgabe 12:

Approximiert man im Variationsproblem

$$(\star) \qquad \int_a^b f(t, y, y')dt = \min!$$

das Integral durch die Trapezsumme und die Ableitungen durch entsprechende Differenzenquotienten, so erhält man das Minimierungsproblem

$$\frac{h}{2} f\Big(a, y(a), \frac{y(a+h) - y(a)}{h}\Big) + h \sum_{i=1}^{n-1} f\Big(t_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\Big) + \frac{h}{2} f\Big(b, y(b), \frac{y(b) - y(b-h)}{h}\Big) = \min!$$

Zeigen Sie, dass bei gegebenen Randwerten die Lösung dieses Problems genau der Anwendung der Mittelpunktsregel auf die Euler'schen Differentialgleichungen

$$y' = v, \quad p' = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y, v), \quad 0 = p - \frac{\partial f}{\partial y'}(t, y, v)$$

entspricht.

Hinweis: Bei der Mittelpunktsregel wird die Ableitung y' durch einen Differenzenquotienten der Form

$$y'(t_i) \to \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

ersetzt (für p' analog).

Aufgabe 13:

Zeigen Sie, dass entlang der Lösung eines Variationsproblems $(\star)$ gilt, dass $f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{(\partial y')^2}$ eine positiv semidefinite Matrix ist.

Hinweis: Setzen Sie $\delta y(t) = vh(t)$ mit h wie im Fundamentallemma.

Programmieraufgabe 2:

Implementieren Sie das Kollokationsverfahren aus Aufgabe 6 ($s = 1$, $c_1 = 1/2$) als Mehrzielmethode wie in Aufgabe 7 für das Randwertproblem

$$y'' + t^{-1}y' - 4t^{-2}y = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y(2) = 17/4.$$

Zerlegen Sie dabei $[1, 2]$ äquidistant in m Teilintervalle $[t_j, t_{j+1}]$, $0 \leq j \leq m - 1$. Testen Sie Ihr Programm mit $m = 2^i$, $1 \leq i \leq 6$, und ermitteln Sie jeweils $\max_{0 \leq j \leq m} |u(t_j) - y(t_j)|$, wobei u die jeweilige Approximation aus dem Kollokationsverfahren an die exakte Lösung y sei. Welche Konvergenzordnung stellen Sie fest? Geeignete Startwerte für $y(t_j)$ – ohne vorausgesetzte Kenntnis der Lösung – erhalten Sie z.B. durch lineare Interpolation (und für $y'(t_j)$ wählen Sie einfach 0).

Hinweis: Die exakte Lösung des Randwertproblems lautet $y(t) = t^2 + t^{-2}$.

Besprechung in der Übung am 30.11.2017.
Abgabe der Programmieraufgabe bis 6.12.2017, 12 s.t.
Ansprechpartner: Balázs Kovács,
`kovacs@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunden: Di 13–14, Do 10–12.