Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 30.10.2017

4. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 8:

Gegeben sei ein 3-Punkt-Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} &y'(t) = f(y(t)) \qquad \text{auf } [a,b] \\ &r(y(a), y(\tau), y(b)) = 0, \qquad a < \tau < b \end{aligned}$$

$y^\star$ sei eine Lösung dieses Problems. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $y^\star$ lokal eindeutig ist.

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in §2 der Vorlesung vor.

Aufgabe 9:

Formulieren Sie die Mehrzielmethode für das 3-Punkt Randwertproblem aus Aufgabe 8. Wie sehen die linearen Gleichungssyteme aus, die in jedem Schritt des Newton-Verfahrens zu lösen sind?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass τ ein Unterteilungspunkt ist.

Aufgabe 10:

Gegeben sei das parameterabhängige Randwertproblem

$$\begin{aligned} &y'(t) = f(y(t), p) \qquad \text{auf } [a,b] \\ &r(y(a), y(b); p) = 0, \qquad r \in \mathbb{R}^{d+q} \end{aligned}$$

mit $y \in \mathbb{R}^d$ und unbekannten Parametern $p \in \mathbb{R}^q$. Zeigen Sie, dass die Anwendung der Mehrzielmethode auf dieses Randwertproblem in jedem Newton-Schritt auf ein Gleichungssystem mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} R_0 & -I & & & P_0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & R_{m-1} & -I & P_{m-1} \\ A & & & B & P_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d(m+1)+q, d(m+1)+q}$$

führt, wobei $P_j = P(t_{j+1}, t_j)$, $j = 0, \dots, m-1$. Dabei ist $P_m = \frac{\partial r}{\partial p}(x_0, x_m; p)$ und $P(t, t_j)$ für $j = 0, \dots, m-1$ Lösung der verallgemeinerten Variationsgleichung zu speziellem Anfangswert:

$$\frac{dP(t,t_j)}{dt} = f_y(y(t|x_j, p); p) P(t, t_j) + f_p(y(t|x_j, p); p), \qquad P(t_j, t_j) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Besprechung in der Übung am 23.11.2017.

Ansprechpartner: Balázs Kovács,
`kovacs@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunden: Di 13–14, Do 10–12.