Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 18.01.2018

11. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 30:
Sei $A = M - N$ eine Zerlegung der symmetrischen, positiv definiten Matrix A, und es sei auch N symmetrisch und positiv definit. Man zeige, dass die Iteration

$$x_{k+1} = x_k + M^{-1}(b - Ax_k)$$

konvergiert und dass die Eigenwerte der Iterationsmatrix reell sind und zwischen 0 und 1 liegen.

Aufgabe 31:
Die Iteration im Zweigitter-Algorithmus kann in der Form

$$u_h^{(k+1)} = Mu_h^{(k)} + v_h$$

mit $v_h := (I - M)u_h$ geschrieben werden.

Geben Sie die Matrix M explizit an für den Fall, dass am Anfang der Iteration ν_1 und beim Nachglätten ν_2 Glättungsschritte durchgeführt werden. Zeigen Sie, dass der Spektralradius von M nur von der Summe $\nu_1 + \nu_2$ abhängt und nicht davon, wieviele Glättungsschritte a priori und wieviele a posteriori durchgeführt werden.

Aufgabe 32:
A sei symmetrisch positiv definit, und $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$ sei invertierbar. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix}$ ist ebenfalls invertierbar, falls C symmetrisch positiv definit ist.

(b) Die Matrix $A + tB^TB$ ist für jedes $t > 0$ positiv definit.

(c) Die Lösung des Minimierungsproblems

$$(P_t) \quad \frac{1}{2}u^T(A + tB^TB)u - u^Tf = \text{ min!}$$

unter der Nebenbedingung $Bu = 0$ hängt nicht von t ab. Die Nebenbedinung werde nun ignoriert, und andererseits werde $\lambda = tBu$ als neue Variable eingeführt. Zeigen Sie, dass ein Problem mit einer Matrix wie in Teilaufgabe (a) entsteht.

(d) Die Lösung von (P_t) konvergiert für $t \to \infty$ (ohne Nebenbedingung) gegen die Lösung von P_0 mit Nebenbedingung $Bu = 0$.

Besprechung in der Übung am 25.01.2018.

Ansprechpartner: Balázs Kovács,
`kovacs@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunden: Di 13–14, Do 10–12.