Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 12.01.2017

## 10. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

**Aufgabe 26:**

(a) Zeigen Sie für lineare Interpolation in den Ecken des Referenzdreiecks $\hat{K}$

$$\|v - \hat{\Pi} v\|_0 \leq C\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(\hat{K})\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$v(x) - v(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} v(tx)\,dt = Dv(x)x - \int_0^1 t \frac{d^2}{dt^2} v(tx)\,dt$$

und dieselbe Formel für $\hat{\Pi} v$.

(b) Zeigen Sie mittels (a) für die lineare Interpolation in den Ecken eines beliebigen Dreiecks $K$ mit Durchmesser $h$

$$\|v - \Pi v\|_0 \leq C\,h^2\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(K)\,,$$

wobei $C$ nicht von $K$ abhängt.

**Aufgabe 27:**

(a) Zeigen Sie für bilineare Interpolation in den Ecken des Einheitsquadrats $\hat{K}$

$$|v - \hat{\Pi} v|_1 \leq C\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(\hat{K})\,.$$

(b) Schließen Sie daraus für den Interpolationsfehler eines aus $\hat{K}$ affin erzeugten finiten Elements $K$ mit Durchmesser $h$ und Inkreisradius $\rho$ :

$$|v - \Pi v|_1 \leq C\,\frac{h^2}{\rho}\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(K),$$

wobei $C$ nicht von $K$ abhängt.

**Aufgabe 28:**
Das elliptische Variationsproblem $a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V$ mit $V \subset H^1(\Omega)$ werde durch ein Galerkin-Verfahren mit Approximationsraum $V_h \leq V$, einer angenäherten Linearform $l_h : V_h \to \mathbb{R}$ und einer angenäherten Bilinearform $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ approximiert:

$$\text{Bestimme } u_h \in V_h \text{ mit } a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h\,.$$

Dabei seien die Bilinearformen $a_h$ gleichgradig elliptisch, dass heisst mit einer von $h$ unabhängigen Zahl $\alpha > 0$ gelte

$$\alpha \|w_h\|_1^2 \leq a_h(w_h, w_h) \quad \forall w_h \in V_h\,.$$

Zeigen Sie für den Fehler (*Lemma von Strang*):

$$\|u - u_h\|_1 \leq c \left( \inf_{v_h \in V_h} \left( \|u - v_h\|_1 + \|a(v_h, \cdot) - a_h(v_h, \cdot)\|_* \right) + \|l - l_h\|_* \right),$$

wobei die Operatornorm $\|\cdot\|_*$ als $\|F\|_* = \sup_{0 \neq w_h \in V_h} \frac{|F(w_h)|}{\|w_h\|_1}$ definiert ist.

Hinweis: Fangen Sie mit der gleichgradigen Elliptizität von $a_h$ für $w_h = u_h - v_h$ an.

**Programmieraufgabe 3:**

Lösen Sie mithilfe finite Elementen das Problem

$$\begin{aligned} -d\Delta u + cu &= f \qquad \text{in} \qquad \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf} \qquad \partial\Omega, \end{aligned}$$

wo die Gebiet $\Omega$ und die Parametern $d > 0, c \geq 0$ sind gegeben, wie folgt:

$\Omega$: Direkt als Triangulierung durch die Matrizen (`Elementen`, `Knoten`);

$\partial\Omega$: Durch das Liste von Randknoten (`Rand`);

$f$: Als eine Matlab funktion (`func_f.m`).

Implementieren Sie die Funktion `[A,M]=matrix_assembly(Elementen,Knoten)` zur berechnung des Masse- und Stefigkeitsmatrix, nach das Pseudocode von die bungen und die Aufgaben A23, A25 und A26. Die Lastvektor können Sie approximieren als

$$\boldsymbol{b}|_j = \int_\Omega f \phi_j \approx \int_\Omega I_h f \phi_j = (\boldsymbol{M} \boldsymbol{f})_j$$

Eine einfache Beispiel – inklusive $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{A}$ – finden Sie unter `https://na.uni-tuebingen.de/ex/num3_ws1718/PA3_FEM_Bsp.zip`.

(a) Lösen Sie die lineare Gleichungssystem die zu dem Problem gehört. Für das Testproblem benützen Sie die Lösung

$$u(x, y) = 1 - x^4 - y^4 \in H_0^1(\Omega),$$

wo $\Omega$ ist die Einheitskreis, gegeben durch die Triangulierung (siehe oben). Lösungs und Inhomogenitäts Funktionen sind gegeben als m-File.

Rechnen Sie aus die Fehlern von die numerische Lösungen für verschiedene Gitter gegeben durch die Files

`Elementen_j.txt`
`Knoten_j.txt` $\qquad j = 1, 2, 3, 4.$

(b) Rechnen Sie aus und geben Sie zurück die Fehlern in die $L^2$ Norm und die $H^1$ Seminorm:

$$\begin{aligned} \|e_h\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|\boldsymbol{e}\|^2_{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}, \\ \|\nabla e_h\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|\boldsymbol{e}\|^2_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}. \end{aligned}$$

Die Gitter und zur behandlung das txt-File, und Alle Files für die Aufgabe finden Sie eine zip-File auch unter `https://na.uni-tuebingen.de/ex/num3_ws1718/PA3_FEM_Bsp.zip`.

**Besprechung in der Übung am 18.01.2018**.
**Abgabe der Programmieraufgabe bis 26.01.2018, 12 s.t.**

Ansprechpartner: Balázs Kovács,
`kovacs@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunden: Di 13–14, Do 10–12.