

8. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 20:

Gegeben sei die Helmholtz-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \Gamma. \quad (**)$$

Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) u ist Lösung von (**)

(b) Es gilt

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) d(x, y) = \int_{\Omega} f v d(x, y) + \int_{\Gamma} g v d\sigma$$

für alle $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

(c) u ist Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v^2 \right] d(x, y) - \int_{\Omega} f v d(x, y) - \int_{\Gamma} g v d\sigma = \min!$$

unter allen $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Aufgabe 21:

Man definiert: $u \in L^2(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ (für $i = 1, \dots, n$), falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$(\phi, \partial_i u)_0 = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, u \right)_0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1 -Gebiete Ω :

(a) Für $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\partial u / \partial x_i$ eine schwache Ableitung.

(b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen (im Sinne der Vorlesung) schwache Ableitungen.

Es gilt (ohne, dass Sie es zeigen müssen): Falls die schwachen Ableitungen von $u \in L^2(\Omega)$ existieren, so sind sie verallgemeinerte Ableitungen und daher auch $u \in H^1(\Omega)$.

Aufgabe 22:

Seien V, W normierte Vektorräume und $L : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$L \text{ stetig} \iff L \text{ stetig in } 0 \iff L \text{ beschränkt.}$$

Programmieraufgabe 3:

Lösen Sie näherungsweise mit dem finite Differenzen-Verfahren

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

für das Einheitsquadrat Ω , und – wenn Sie wollen – auch für den Einheitskreis. Nehmen Sie z.B. $h = 1/16$.

Besprechung in der Übung am 08.12.2015.

Abgabe der Programmieraufgabe bis 15.12.2015, 12 h s.t.

Ansprechpartner: Sarah Eberle,

eberle@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde nach Vereinbarung