

7. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 17:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Wie ist das finite Differenzen-Verfahren für die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \Gamma$$

zu modifizieren, wenn Ω nicht durch Gitterlinien berandet wird? Diskutieren Sie dies anhand eines Fünf-Punkte-Sternes, durch den der Rand läuft.

Ist die Matrix des Gleichungssystems noch symmetrisch? Gilt noch das diskrete Maximumprinzip?

Aufgabe 18:

Sei u Lösung der Poissongleichung mit Dirichlet-Randbedingungen:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \Gamma \quad (*)$$

und \tilde{u} löse das Problem zu gestörten Randdaten \tilde{g} . Es seien $u, \tilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie:

$$\sup_{\Omega} |\tilde{u} - u| \leq \sup_{\Gamma} |\tilde{g} - g|$$

und eine ebensolche Abschätzung für die finite Differenzen-Approximation.

Aufgabe 19:

Sei u Lösung von (*), und sei \tilde{u} Lösung des Problems zu gestörter rechter Seite \tilde{f} . Es seien $u, \tilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie:

$$\sup_{\Omega} |\tilde{u} - u| \leq \frac{r^2}{4} \cdot \sup_{\Omega} |\tilde{f} - f|,$$

falls Ω in einem Kreis vom Radius r enthalten ist.

Hinweis: So etwas kennen Sie ja schon für das diskretisierte Problem.

Besprechung in der Übung am 01.12.2015.

Ansprechpartner: Sarah Eberle,
eberle@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde nach Vereinbarung