

## 2. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

### Aufgabe 3:

Zum Randwertproblem

$$y' = C(t)y + q(t), \quad Ay(a) + By(b) = 0$$

betrachte man die Sensitivitätsmatrix

$$E(t) = AR(a, t) + BR(b, t) \quad (a \leq t \leq b).$$

- (a) Zeigen Sie:  $E(t)$  ist für alle  $t \in [a, b]$  invertierbar  $\iff E(t)$  ist für ein  $t \in [a, b]$  invertierbar. Dies sei im folgenden erfüllt.
- (b) Zeigen Sie: Die eindeutige Lösung des obigen Randwertproblems ist gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t, s)q(s)ds$$

mit der Green'schen Funktion

$$G(t, s) = \begin{cases} E(t)^{-1}AR(a, s) & \text{für } a \leq s \leq t \leq b \\ -E(t)^{-1}BR(b, s) & \text{für } a \leq t \leq s \leq b. \end{cases}$$

Hinweis: Stellen Sie  $y(t)$  als Summe der Lösung  $v(t)$  des zugehörigen Anfangswertproblems mit Anfangswert  $v(a) = 0$  und der Lösung  $w(t)$  des zugehörigen homogenen AWP's mit geeignetem Anfangswert  $w(0) = w_0$  dar.

- (c) (Empfindlichkeit gegenüber Störungen der Inhomogenität)  
Seien  $y, \tilde{y}$  die Lösungen der Randwertprobleme

$$\begin{aligned} y' &= C(t)y + q(t), & Ay(a) + By(b) &= r \\ \tilde{y}' &= C(t)\tilde{y} + \tilde{q}(t), & A\tilde{y}(a) + B\tilde{y}(b) &= r. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\max_{a \leq t \leq b} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \gamma \max_{a \leq t \leq b} \|q(t) - \tilde{q}(t)\|$$

$$\text{mit } \gamma = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b \|G(t, s)\| ds \leq (b-a) \max_{a \leq s, t \leq b} \|G(t, s)\|$$

### Aufgabe 4:

- (a) Schreiben Sie das Randwertproblem (mit reellem Parameter  $\lambda \neq 0$ )

$$u'' = \lambda^2 u, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

durch Einführen von  $v = u'/\lambda$  in ein System 1. Ordnung um. Berechnen Sie dessen Resolvente und die Green'sche Funktion des Randwertproblems. Weisen Sie nach, dass für  $\lambda \rightarrow +\infty$  die Resolvente wie  $e^\lambda$  wächst, wogegen die Green'sche Funktion unabhängig von  $\lambda$  beschränkt bleibt.

(Somit ist das Anfangswertproblem schlecht konditioniert, das Randwertproblem gut konditioniert.)

(b) Für welche Werte von  $\omega \in \mathbb{R}$  ist das Randwertproblem

$$u'' = -\omega^2 u, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

eindeutig lösbar? Wie verhalten sich Resolvente des Anfangswertproblems und Green'sche Funktion des Randwertproblems für  $\omega \rightarrow \pi$ ?

(Anfangswertproblem gut konditioniert, Randwertproblem schlecht konditioniert)

Hinweise:  $R(t, s) = e^{C(t-s)}$ ,  $C$  diagonalisieren.  $\lambda = i\omega$  in (b) erspart Ihnen Rechenarbeit.

### Programmieraufgabe 1:

Implementieren Sie das einfache Schießverfahren für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(t) &= \lambda \cdot (u(t))^2, & t \in [a, b], \\ u(a) &= u_a, u(b) = u_b, \end{aligned}$$

mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Implementieren Sie zum Lösen des zugehörigen Anfangswertproblems in jedem Newton-Schritt (sowie zum Lösen der Anfangswertprobleme zur Bestimmung der im Newton-Verfahren benötigten Resolvente) das klassische Runge-Kutta-Verfahren.
- Berechnen Sie die in der Vorlesung definierten Matrizen  $A^k$ ,  $B^k$  und  $C^k$  von Hand.
- Zum Lösen des linearen Gleichungssystems in jedem Newton-Schritt können Sie den eingebauten Matlab-Operator `\` benutzen.
- Brechen Sie ab, sobald die Randbedingungen bis auf einen Fehler  $< TOL$  erfüllt sind.

Testen Sie Ihr Programm mit  $a = 0, b = 1, u_a = 0, u_b = 1, \lambda = 1/2$  und  $TOL = 1e - 7$ . Verwenden Sie als Startwert  $u'(0) = -5$ . Plotten Sie die Trajektorie der gefundene Approximation an die Lösung gegen  $t$ . Vergleichen Sie diese mit den Trajektorien des zugehörigen Anfangswertproblems mit  $u(0) = u_a, u'(0) = s$  und  $s = -4, -12$ .

**Besprechung in der Übung am 27.10.2015.**

**Abgabe der Programmieraufgabe bis 03.11.2015, 12 h s.t.**

Ansprechpartner: Sarah Eberle,

eberle@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde nach Vereinbarung