Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.02.2016

14. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 38:
Betrachten Sie das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) \qquad \text{in } (0,\pi), \\ u(0) &= u(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Zur Diskretisierung werden lineare Finite Elemente mit einer äquidistanten Unterteilung von $[0,\pi]$ in $(N+1)$ Teilintervalle der Länge h gewählt.

(a) Geben Sie die Matrizen A und M des zugehörigen Systems $A\mu = \lambda M\mu$ an.

(b) Die kontinuierlichen Eigenwerte und -vektoren lauten

$$\lambda_m = m^2, \qquad u_m(x) = \sin(mx), \qquad m = 1,2,\ldots$$

Die diskreten Eigenwerte und -vektoren sind gegeben durch

$$\lambda_{m,h} = \frac{6}{h^2}\frac{1-\cos mh}{2+\cos mh}, \qquad u_{m,h} = \Pi_h u_m, \qquad m = 1,2,\ldots,N.$$

Dabei bezeichnet $\Pi_h v = \sum_{n=1}^N v(nh)\varphi_n$ die stückweise lineare Interpolation in den Gitterpunkten mit der Finite Elemente-Basis $(\varphi_n)_{n=1}^N$. Verifizieren Sie dies und zeigen Sie die Abschätzung

$$\lambda_m - \lambda_{m,h} \le C(m)h^2.$$

Aufgabe 39:
Betrachten Sie das Anfangs/Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t} &=& \Delta u + f(x,t) & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u &=& 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \\ u &=& u_0 & \text{für } t = 0 \end{array}$$

mit stetigem $f : \bar{\Omega} \times [0,T] \to$ und $u_0 : \bar{\Omega} \to$.
Zeigen Sie unter der Annahme, dass eine klassische Lösung $u : \bar{\Omega} \times [0,T] \to$ existiert, dass diese gegeben ist durch

$$u(\cdot,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (u_0,w_k)e^{-\lambda_k t} + \int_0^t (f(\cdot,s),w_k)e^{-\lambda_k(t-s)}ds \right\} w_k.$$

Hinweis: Der Ausdruck in geschweiften Klammern ist die Lösung des linearen skalaren Anfangswertproblems

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = -\lambda_k\alpha_k + (f(\cdot,t),w_k). \,, \quad \alpha_k(0) = (u_0,w_k)$$

Unter welchen (schwachen) Regularitätsvoraussetzungen an f und u_0 macht obige Formel noch Sinn?

Aufgabe 40:
Betrachten Sie die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u + f(x,t) && \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \\ u &= u_0, \frac{\partial u}{\partial t} = v_0 && \text{für } t = 0 \end{aligned}$$

Wie sieht die Eigenbasisentwicklung einer (klassischen) Lösung dieses Anfangs/Randwertproblems aus?

Hinweis: Die Lösung von $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2\alpha + \phi(t)$, $\alpha(0) = \alpha_0$, $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \beta_0$ ist gegeben durch $\alpha(t) = \cos\omega t \cdot \alpha_0 + \omega^{-1}\sin\omega t \cdot \beta_0 + \int_0^t \omega^{-1}\sin\omega(t-s)\phi(s)ds$.

Besprechung in der Übung am 09.02.2016.
Ansprechpartner: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde nach Vereinbarung