Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.01.2016

13. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 35:
Sei H Hilbertraum, $T : H \to H$ kompakt. Falls $\dim H = \infty$, so ist $0 \in \sigma(T)$.

Aufgabe 36:
Seien $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei Gebiete mit zugehörigen Dirichlet-Problemen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega_i, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_i, \end{aligned}$$

mit Eigenwerten $\lambda_m(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, $m = 1, 2, \ldots$ Zeigen Sie:

$$\lambda_m(\Omega_1) \geq \lambda_m(\Omega_2).$$

Aufgabe 37:
Betrachten Sie das Anfangs-/Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u &= 0 && \text{auf } \Omega \times (0, T), \\ u &= u_0 && \text{für } t = 0 \end{aligned}$$

mit $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Falls eine klassische Lösung $u : \overline{\Omega} \times [0, T]$ existiert, so ist diese gegeben durch

$$u(\cdot, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (u_0, w_m) e^{-\lambda_m t} w_m,$$

wobei λ_m und w_m die Eigenwerte bzw. $L_2(\Omega)$-orthonormalen Eigenvektoren des Laplace-Operators sind.
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x, t) = \varphi(t) w(x)$.

(b) Folgern Sie für bel. $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(\cdot, t) \right\|_0 \leq C(t, k) \|u_0\|_0.$$

Was geschieht im Falle $t \to \infty$?

Besprechung in der Übung am 02.02.2016.
Ansprechpartner: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde nach Vereinbarung