Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 25.11.2013

7. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 16:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Wie ist das finite Differenzen-Verfahren für die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \, , \qquad u = g \quad \text{auf } \Gamma$$

zu modifizieren, wenn Ω nicht durch Gitterlinien berandet wird? Diskutieren Sie dies anhand eines Fünf-Punkte-Sternes, durch den der Rand läuft.

Ist die Matrix des Gleichungssystems noch symmetrisch? Gilt noch das diskrete Maximumprinzip?

Aufgabe 17:

Sei u Lösung der Poissongleichung mit Dirichlet-Randbedingungen:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \, , \qquad u = g \quad \text{auf } \Gamma \tag{$*$}$$

und $\widetilde{u}$ löse das Problem zu gestörten Randdaten $\widetilde{g}$. Es seien $u, \widetilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie:

$$\sup_{\Omega} |\widetilde{u} - u| \leq \sup_{\Gamma} |\widetilde{g} - g|$$

und eine ebensolche Abschätzung für die finite Differenzen-Approximation.

Aufgabe 18:

Sei u Lösung von $(*)$, und sei $\widetilde{u}$ Lösung des Problems zu gestörter rechter Seite $\widetilde{f}$. Es seien $u, \widetilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie:

$$\sup_{\Omega} |\widetilde{u} - u| \leq \frac{r^2}{4} \cdot \sup_{\Omega} |\widetilde{f} - f| \, ,$$

falls Ω in einem Kreis vom Radius r enthalten ist.

Hinweis: So etwas kennen Sie ja schon für das diskretisierte Problem.

Programmieraufgabe 3 :

Lösen Sie näherungsweise mit dem finite Differenzen-Verfahren

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega \, , \qquad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

für das Einheitsquadrat Ω, und – wenn Sie wollen – auch für den Einheitskreis. Nehmen Sie z.B. $h = 1/16$.

Besprechung in der Übung am 02.12.2013.
Abgabe der Programmieraufgabe bis 16.12.2013, 12 h s.t.
Ansprechpartner: Bernd Brumm,
`brumm@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung