Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 11.11.2013

5. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 10: Helfen Sie Leibniz und Bernoulli: Leiten Sie (anachronistisch) die Kettenlinie durch Minimierung der potentiellen Energie her. Was genau ist zu minimieren? Wie lauten die Euler'schen Gleichungen? Weisen Sie nach, dass die in §1 der Vorlesung angegebene Lösung mit der cosh-Funktion eine Lösung der Euler'schen Gleichungen liefert.

Aufgabe 11: Approximiert man im Variationsproblem

$$(\star) \qquad \int_a^b f(t, y, y')dt = \min!$$

das Integral durch die Trapezsumme und die Ableitungen durch entsprechende Differenzenquotienten, so erhält man das Minimierungsproblem

$$\frac{h}{2} f\Big(a, y(a), \frac{y(a+h)-y(a)}{h}\Big) + h \sum_{i=1}^{n-1} f\Big(t_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\Big) + \frac{h}{2} f\Big(b, y(b), \frac{y(b)-y(b-h)}{h}\Big) = \min!$$

Zeigen Sie, dass bei gegebenen Randwerten die Lösung dieses Problems genau der Anwendung der Mittelpunktsregel auf die Euler'schen Differentialgleichungen

$$y' = v, \quad p' = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y, v), \quad 0 = p - \frac{\partial f}{\partial y'}(t, y, v)$$

entspricht.

Hinweis: Bei der Mittelpunktsregel wird die Ableitung y' durch einen Differenzenquotienten der Form

$$y'(t_i) \to \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$$

ersetzt (für p' analog).

Aufgabe 12: Zeigen Sie, dass entlang der Lösung eines Variationsproblems $(\star)$ gilt, dass $f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{(\partial y')^2}$ eine positiv semidefinite Matrix ist.

Hinweis: Setzen Sie $\delta y(t) = vh(t)$ mit h wie im Fundamentallemma.

Programmieraufgabe 2 : Implementieren Sie das Kollokationsverfahren aus Aufgabe 5 ($s = 1$, $c_1 = 1/2$) als Mehrzielmethode wie in Aufgabe 6 für das Randwertproblem

$$y'' + t^{-1}y' - 4t^{-2}y = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y(2) = 17/4.$$

Zerlegen Sie dabei $[1, 2]$ äquidistant in m Teilintervalle $[t_j, t_{j+1}]$, $0 \le j \le m - 1$. Testen Sie Ihr Programm mit $m = 2^i$, $1 \le i \le 6$, und ermitteln Sie jeweils $\max_{0 \le j \le m} |u(t_j) - y(t_j)|$, wobei u die jeweilige Approximation aus dem Kollokationsverfahren an die exakte Lösung y sei. Welche Konvergenzordnung stellen Sie fest? Geeignete Startwerte für $y(t_j)$ – ohne vorausgesetzte Kenntnis der Lösung – erhalten Sie z.B. durch lineare Interpolation (und für $y'(t_j)$ wählen Sie einfach 0).
Hinweis: Die exakte Lösung des Randwertproblems lautet $y(t) = t^2 + t^{-2}$.

Besprechung in der Übung am 18.11.2013.
Abgabe der Programmieraufgabe bis 25.11.2013, 12 h s.t.
Ansprechpartner: Bernd Brumm,
`brumm@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde Fr 13 - 17 nach Anmeldung