Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 26.06.2017

10. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 29: (Fletcher–Reeves)

Beim cg-Verfahren von Fletcher–Reeves kann man die eindimensionalen Minimierungsverfahren näherungsweise lösen bis die Abbruchbedingung

$$|g_{k+1}^T d_k| \le \sigma g_k^T d_k, \qquad \sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

erfüllt ist.

Zeigen Sie, dass dann das Verfahren für jedes k ein Abstiegsverfahren ist, d.h., dass die Suchrichtung $-d_k$ eine Abstiegsrichtung ist, d.h., dass für kleine $\alpha > 0$ gilt

$$f(x_k - \alpha d_k) < f(x_k).$$

Hinweis: Zeigen Sie für $d_0 = g_0$ mit vollständiger Induktion

$$\left| \frac{g_k^T d_k}{g_k^T g_k} - 1 \right| \le \sum_{j=0}^{k} \sigma^j - 1.$$

Welche Werte kann $g_k^T d_k$ also annehmen? Interpretieren Sie nun $g_k^T d_k$ geometrisch.

Aufgabe 30: (Matrix-Rang bei Arnoldi)

Zeigen Sie, dass die Matrix $\widetilde{H}_k$ aus dem Arnoldi-Verfahren vollen Rang hat und dass lineare Ausgleichsprobleme mit dieser Matrix eindeutig lösbar sind.

Aufgabe 31: (Orthogonale Transformation bei Arnoldi)

Zur Lösung von $Ax = b$ mit einer nichtsingulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird das GMRES- bzw. das FOM-Verfahren verwendet. Dabei sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ die Arnoldi-Basis zum Startvektor b. Zeigen Sie:

(a) Wendet man das Arnoldi-Verfahren auf das transformierte Problem $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ mit $\hat{A} = QAQ^T$ und $\hat{b} = Qb$ an, wobei Q eine orthogonale Matrix ist, so gilt für die Vektoren $\{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_k\}$ der neuen Arnoldi-Basis $\hat{v}_j = Qv_j$.

(b) Zeigen Sie damit, dass GMRES und FOM für das transformierte Problem $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$ die Lösung $\hat{x} = Qx$ liefern.

Aufgabe 32: (Invarianz unter Shifts)

Zeigen Sie, dass das Arnoldi- und das Lanczos-Verfahren invariant unter Shifts sind, d.h., wenn man A durch $A + \lambda I$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ersetzt, bleiben die Krylov-Basen V_k und beim Lanczos-Verfahren W_k unverändert. Wie ändern sich die Hessenbergmatrizen H_k bzw. T_k?

Besprechung in den Übungen am 11.07.2017

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr