Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 24.05.2017

7. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 20: (Frobenius-Norm)

Zeigen Sie, dass $\|A\|_F := (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2)^{1/2}$ eine Norm auf dem Vektorraum der $n \times n$ Matrizen definiert, für die $\|A\|_F^2 = \mathrm{spur}(A^T A)$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass es keine Norm $\|.\|$ auf dem n-dimensionalen Raum gibt mit

$$\|A\|_F = \max_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Aufgabe 21: (Eigenschaften der Singulärwertzerlegung)

Sei $U^T AV = \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ die Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \dots \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$, wobei $U = (u_1, \dots u_m) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T \,, \\ \|A\|_2 &= \sigma_1 \,, \\ \|A\|_F^2 &= \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2, \end{aligned}$$

wobei $\|A\|_F$ die Frobeniusnorm aus Aufgabe 20 bezeichnet. Folgern Sie daraus:

$$\begin{aligned} \text{Rang } A &= r \,, \\ \text{Ker } A &=< v_{r+1}, \dots, v_n > , \\ \text{Im } A &=< u_1, \dots, u_r > \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 22: (Waidmanns Heil)

Führen Sie die in der Vorlesung beschriebene "Zickzackjagd nach Nichtnullelementen" durch für

$$BQ^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Besprechung in den Übungen am 13.06.2017

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr

Programmieraufgabe 5:

Sei eine $m \times n$ Matrix A und deren Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, Σ_r nicht singulär, gegeben.

Überlegen Sie sich, dass die Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\|Ax - b\|_2 = \min, \qquad \|x\|_2 = \min \tag{1}$$

durch

$$x = A^+ b, \qquad A^+ = V\Sigma^+ U^T, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gegeben ist.

Schreiben Sie dann ein Matlab-Programm, welches das Problem (1) auf die genannte Weise löst.

Hinweis: Wenn sie in der Matlab-Hilfe nach ‘svd‘ (wie ‘singular value decomposition‘) suchen, brauchen Sie die Singulärwertzerlegung nicht selbst zu programmieren.

Abgabe Programmieraufgabe 12.06.2017 12h an `progtutor@na.uni-tuebingen.de`