Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 24.04.2017

2. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 5:

(a) Sei $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ (also x_j *reell*). Zeigen Sie für die diskrete Fourier-Transformierte $\hat{x}$ von x

$$\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k} \qquad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine gerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die (diskrete) Fourier-Transformierte $\hat{x}$ gerade.
Falls x ungerade ist (d.h. $x_{-k} = -x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ ungerade.

Aufgabe 6: (Sortierproblem)

Eine Datei von $N = 2^L$ Namen soll alphabetisch geordnet werden. Geben Sie einen Algorithmus an, der dies in $\mathcal{O}(N \ \log N)$ Operationen durchführt.
Hinweis: Divide et impera!

Aufgabe 7: Mit wie vielen komplexen Additionen und Multiplikationen lässt sich die Faltung von zwei endlichen Folgen der Länge N berechnen? (Mit und ohne FFT)?

Aufgabe 8: Sei f stetig und 2π-periodisch mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel lautet

$$\widetilde{\widehat{f}}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-int_j} \qquad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie die Aliasing-Formel

$$\widetilde{\widehat{f}}_N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \widehat{f}(n + lN).$$

Besprechung in den Übungen am 02.05.2017
Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr