Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.04.2017

1. Übungsblatt zu Algorithmen der Numerischen Mathematik

Aufgabe 1: (Sinus-/Cosinusreihe)

Zeigen Sie, dass die Fourierreihe einer stetigen, 2π-periodischen Funktion, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ die äquivalente Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$$

erlaubt. Geben Sie a_n, b_n als Funktion der c_n an. Wie lassen sich a_n und b_n aus $f(t)$ berechnen? Was ergibt sich für gerade und ungerade Funktionen ($f(t) = f(-t)$ bzw. $f(t) = -f(-t)$)?

Aufgabe 2: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine absolut summierbare Folge komplexer Zahlen, und bezeichne $\hat{c}(t)$ die zugehöhrige Fourier-Reihe. Zeigen Sie, dass sich aus der Orthogonalität der komplexen Exponentialfunktion Folgendes ergibt:

(a) Umkehrformel:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \hat{c}(t)\, dt$$

(b) Parseval-Formel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{c}(t)|^2\, dt$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie den Faltungssatz:
Falls die komplexen Folgen $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $d = (d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ absolut summierbar sind, so ist es auch die Faltung $c * d$, und es gilt

$$\widehat{(c * d)}(t) = \hat{c}(t)\, \hat{d}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: (Cesàro-Summen)

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir die *Cesàro-Summe*

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Zeigen Sie: Aus der Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein a folgt Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert aber nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Besprechung in den Übungen am 25.04.2017

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr