Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 19.12.2016

9. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 33: Wenden Sie den Householder-Algorithmus an auf die Rotationsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

Aufgabe 34: (Ausgleichsgerade) Es liege das physikalische Gesetz $y = x_1 t + x_2$ mit zwei unbekannten Parametern x_1, x_2 vor, zu dem ein Satz von Messdaten $\{t_l, y_l\}_{l=1,\dots,m}$ mit $t_l = l$ gegeben sei. Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - y\| = \min!$ auf. Wie lautet die Normalgleichung für das lineare Ausgleichsproblem?

Aufgabe 35:

(a) Berechnen Sie iterativ $x = 1/a$ für ein gegebenes $a \neq 0$ ohne Division. Für welche Startwerte x_0 konvergiert das Verfahren?

(b) Geben Sie ein lokal quadratisch konvergentes Iterationsverfahren zur Berechnung von $x = \sqrt{a}$ für $a > 0$ an. Verwenden Sie dabei nur die arithmetischen Grundoperationen.

Aufgabe 36: Sei p ein Polynom vom Grad n, dessen Nullstellen $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_n$ reell seien.

(a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren gegen ξ_1 konvergiert, falls der Startwert $x_0 > \xi_1$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ für $x > \xi_1$ das gleiche Vorzeichen haben. Zeigen Sie dann, dass das Newton-Verfahren eine monoton abnehmende Folge liefert.

(b) Zeigen Sie, falls x_0 viel größer als ξ_1 ist, konvergiert das Newton-Verfahren sehr langsam ($x_{k+1} \approx (1 - \frac{1}{n})x_k$).

Besprechung in den Übungen am 10.01.2017
Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr

Programmieraufgabe 5: (Newton-Verfahren)

Schreiben Sie eine Funktion `newton(f,x0,tol)`, die für eine feste Funktion $\texttt{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und für gegebenen Startwert $\texttt{x0} \in \mathbb{R}^n$ Newton-Iterationen bis zu $\|\Delta x_k\| \leq \texttt{tol}$ durchführt. Diese Funktion soll die Jakobimatrix $f'(x)$ numerisch berechnen (mit einseitigen Differenzen, Vergleich Vorlesung). Sie dürfen benutzen, dass Matlab bzw. Julia mit $A\backslash b$, das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

Testen Sie die Funktion am System

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= 11 \\ x_1x_2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

mit Startwert $(4, -2, 0)^T$ und $\texttt{tol}= 10^{-6}$ in einem Programm `mainNewton()`.

Abgabe: siehe ILIAS
Ansprechpartner Programmieraufgaben: `progtutor@na.uni-tuebingen.de`,
Sprechstunde: Mittwoch, 13-15 Uhr

Das Numerik-Team wünscht allen frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!