Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 05.12.2016

7. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 25:

(a) Sei $A = LR$ die LR-Zerlegung der $(n \times n)$-Matrix A mit $|l_{ij}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\max_{i,j} |r_{ij}| \leq 2^{n-1} \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$ für die Zeilen a_i^T und r_i^T von A und R und Induktion.

(b) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tritt Gleichheit in obiger Abschätzung auf.

Aufgabe 26: Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix A positiv definit?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 14 \\ 8 & 14 & c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27: Zeigen Sie:

$$\operatorname{cond}(A) = \frac{\max_{\|y\|=1} \|Ay\|}{\min_{\|z\|=1} \|Az\|}.$$

Anmerkung: Mit Hilfe der rechten Seite lässt sich die Kondition auch für nichtquadratische Matrizen definieren.

Aufgabe 28: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass für die zur Betragssummen- und zur Maximumsnorm gehörenden Matrixnormen gilt:

(a) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)

(b) $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \, \|A\|_\infty$

Besprechung in den Übungen am 13.12.2016

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr