Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 28.11.2016

6. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 21: Jedes Element T_{ik} im h^2-Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen.

Zeigen Sie, dass $T_{2,2}$ bei Verwendung der Folge $\{n_j\} = \{1, 2, 3\}$ der Simpsonregel entspricht.

Welcher Quadraturformel entspricht $T_{3,3}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 22: Seien A und T $n \times n$ Matrizen und T invertierbar. Geben Sie einen Algorithmus an, der $T^{-1}AT$ in $\frac{7}{3}n^3 + O(n^2)$ Operationen berechnet.

Berechnen Sie mit diesem Algorithmus $T^{-1}AT$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 19 \\ 0 & -12 & 50 \\ 9 & -18 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23: Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen (falls durchführbar) die Struktur von Bandmatrizen in folgendem Sinne erhält: Falls $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > p$, so ist $l_{ij} = 0$ für $i - j > p$ und $r_{ij} = 0$ für $j - i > p$.

Wie viele Operationen sind zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit einer derartigen Matrix nötig?

Aufgabe 24: Bestimmen Sie die Matrizen L und R der Zerlegung $LR = A$ durch Gauß-Elimination für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -8 & 12 & -4 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Zerlegung für

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Besprechung in den Übungen am 06.12.2016

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr

Programmieraufgabe 4:

Schreiben Sie die Funktion (vgl. Notation im Skript)

$$\texttt{extrapol\_tableau}(\texttt{H}, \texttt{tol}, \texttt{num\_verfahren}),$$

welche das Extrapolationstableau (T_{ij}) aus der Vorlesung berechnet, wobei Sie $n_j = j$ solange nehmen, bis das Abbruchkriterium der Vorlesung erfüllt ist. Schreiben Sie dann die Funktion

$$\texttt{extrapol\_script}(),$$

welche das Integral $I := \int_0^1 e^x \, dx$ approximiert, indem es die h^2-Extrapolation auf die äquidistante Trapezregel anwendet mit `H=1` und `tol=1e-8`. Geben Sie die Matrix-Dimension des Tableaus, die Fehler $T_{j1} - I$ und $T_{jj} - I$ an (was beobachten Sie?) und auch den Fehlerschätzer $T_{jj} - T_{j,j-1}$ an.

Hinweis (an Julia-Nutzer): `T=Array[[1.0]]` erzeugt eine Pseudo-Matrix mit `T[1]==[1.0]`. `push!(T,Tj)` vergrößert `T` für `Tj`$\in \mathbb{R}^n$. Mit einer Hilfsfunktion verwandelt man `T` in eine Matrix (für eine akzeptable Ausgabe).

Hinweis (an Matlab-Nutzer): Falls `T` $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dann vergrößert `T(3,2)` die Matrix.

Abgabe: siehe ILIAS

Ansprechpartner Programmieraufgaben: `progtutor@na.uni-tuebingen.de`,
Sprechstunde: Mittwoch, 13-15 Uhr