Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 21.11.2016

5. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 17: Stellen Sie für eine äquidistante Zerlegung $x_j = x_0 + jh$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ das Gleichungssystem für den kubischen Spline s mit

$$\begin{aligned} s(x_j) &= 0 \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n \\ s'(x_0) &= 1 \quad\; s'(x_n) = 0 \end{aligned}$$

auf. Zeigen Sie, dass die Steigungen $v_j = s'(x_j)$ mit wachsendem j rasch abfallen.

Interpretation: Störungen in den Ableitungen am Rand wirken sich im interpolierenden Spline auf Intervallen weg von x_0 kaum aus.

Aufgabe 18: Geben Sie einen Algorithmus an, welcher das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 16 (Blatt 4) mit einem Rechenaufwand löst, der nur linear mit der Anzahl der Stützstellen wächst.

Aufgabe 19: Der kubische Spline minimiert $\int_a^b [s''(x)]^2 dx$. Minimiert man allgemeiner

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx + \lambda^2 \int_a^b [s'(x)]^2 dx,$$

erhält man einen Spline, bei dem zusätzlich die Länge minimiert wird. Dies entspricht physikalisch einem Balken unter Zug. Für einen derartigen Spline ergibt sich der Ansatz

$$s_i(x) = a_i + b_i x + c_i e^{\lambda x} + d_i e^{-\lambda x}.$$

Erklären Sie den Ansatz und definieren Sie natürliche, periodische und eingespannte Splines unter Zug.

Aufgabe 20: Bestimmen Sie für das Interpolationspolynom aus Aufgabe 10 mit Hilfe der dividierten Differenzen alle Ableitungen für $x = -2$.

Besprechung in den Übungen am 29.11.2016

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr