Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 07.11.2016

3. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 9: Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ zweiten Grades einer Funktion f zu den Daten

$$\begin{array}{c|ccc} x_j & t & t+h/2 & t+h \\ \hline y_j & f(t) & f(t+h/2) & f(t+h) \end{array} \quad t \in \mathbb{R},\ h > 0.$$

Zeigen Sie weiter: Integriert man dieses Polynom von t bis $t+h$, so erhält man die Simpsonregel.

Aufgabe 10: Gegeben seien die Stützpunkte

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} f_i & 7 & 1 & -1 & 7 \\ \hline x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

für $i = 0, 1, 2, 3$.

Bestimmen Sie die Newton-Darstellung des Interpolationsploynoms, indem Sie die dividierten Differenzen berechnen.

Aufgabe 11: Beweisen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome T_0,..., T_n orthogonal sind bezüglich $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, d.h. $\langle T_m, T_n\rangle = 0$ für $m \neq n$.

Aufgabe 12: Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x).$$

Falls

$$\begin{array}{lll} d_k = c_k + 2x\, d_{k+1} - d_{k+2} & (k = n, n-1, \ldots, 0), & d_{n+1} = d_{n+2} = 0, \\ e_k = d_k + 2x\, e_{k+1} - e_{k+2} & (k = n, n-1, \ldots, 1), & e_{n+1} = e_{n+2} = 0, \end{array}$$

dann ist bekanntlich $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$ (Clenshaw). Zeigen Sie, dass außerdem gilt:

$$p'(x) = e_1 - e_3.$$

Besprechung in den Übungen am 14.11.2016
Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr

Programmieraufgabe 3: **(Clenshaw-Algorithmus)**

Sei $\texttt{f}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ und $\texttt{n} \geq 0$. Schreiben Sie eine Funktion

`clenshaw_coeff(f,n)`,

welche die (c_k) des Clenshaw-Algorithmus ausrechnet. Sei $\texttt{c} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\texttt{x} \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie

`clenshaw_eval(c,x)`,

welche den Auswertungsalgorithmus von Clenshaw implementiert. Schreiben Sie dann ein Funktion

`clenshaw_bsp()`,

welche die Koeffizienten $(c_k)_{k=0,\ldots,10}$ von $f(x) = \arctan(x)$ berechnet und dann $p(x)$ für $x = \frac{1}{2}$ auswertet.

Abgabe bis 28.11.2016

Ansprechpartner Programmieraufgaben: `progtutor@na.uni-tuebingen.de`,
Sprechstunde: Mittwoch, 14-15 Uhr