Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 31.10.2016

2. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 5: Für jede auf $[a, b]$ positive, stetige Funktion ω ist durch

$$(f, g) := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen reellwertigen Funktionen definiert.
Zeigen Sie: Die bezüglich der Gewichtsfunktion ω auf dem Intervall $[a, b]$ orthogonalen Polynome p_k erfüllen

$$p_k(x) = C_k \frac{1}{\omega(x)} \frac{d^k}{dx^k} \left[\omega(x)(x-a)^k(b-x)^k\right], \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad \text{(Formel von Rodriguez)}$$

falls die rechte Seite ein Polynom vom Grad k ist.

Hinweis: Weisen Sie nach, dass das wie oben definierte Polynom orthogonal zu allen Polynomen vom Grad $\leq k-1$ ist. Verwenden Sie dazu partielle Integration.

Aufgabe 6: Die Legendre-Polynome P_k sind durch die Bedingung $P_k(1) = 1$ normiert.
Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 5:

$$P_k(x) = \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \frac{d^k}{dx^k} \left[(1-x^2)^k\right].$$

Aufgabe 7: Gegeben seien die Trapezregel (TR) und die Mittelpunktsregel (MR) zur numerischen Approximation eines Integrals. Bestimmen Sie die Knoten und Gewichte der Quadraturformel

$$\alpha \cdot TR + \beta \cdot MR \approx \int_a^b f(x) \, dx$$

in Abhängigkeit von α und β. Für welche Wahl der Parameter wird die Ordnung maximal? Begründen Sie Ihre Aussage anhand der Ordnungsbedingungen.

Aufgabe 8: Eine Folge $\{S_n\}$ erfülle

$$S_{n+1} - S = \rho_n(S_n - S) \qquad \text{mit } \rho_n \to \rho, \quad \rho \neq 1.$$

Zeigen Sie, dass die durch die Aitken'sche Δ^2-Regel erhaltene Folge $\{S'_n\}$ schneller als die ursprüngliche Folge gegen S konvergiert, d. h.

$$\frac{S'_n - S}{S_n - S} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Die Folge $\{S'_n\}$ kann gegen S konvergieren, ohne dass $\{S_n\}$ konvergiert.

Besprechung in den Übungen am 08.11.2016
Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr

Programmieraufgabe 2: (Adaptive numerische Integration)

(a) Es sei `a` $<$ `b`, `tol` > 0 und `f`$\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Schreiben Sie eine Funktion `adaptint(a,b,tol,f)`, die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ adaptiv nach der Vorlesung berechnet, wobei Sie die Simpsonregel mit Mittelpunktsregel benutzen sollen (anstatt Gauß der Ordnung 15 mit entsprechender eingebetteter Formel). Geben Sie auch die Anzahl der Funktionsauswertungen aus.

Hinweis: `adaptint()` soll `adaptint()` mit anderen Parameter aufrufen. Die Funktion soll sich also rekursiv aufrufen.

(b) Schreiben Sie die Funktion `adaptint_run()`, welches das Integral

$$\int_{-1}^{1} e^{-100\cdot x^2}\,dx \tag{1}$$

approximiert bis auf einen Fehler von `tol` $= 10^{-5}$. Dies soll einmal durch `adaptint()` und einmal durch eine äquidistante Simpsonregel geschehen. Vergleichen Sie die Anzahl der Funktionsauswertungen und erklären Sie das Verhalten.

Hinweis: Sie dürfen die erste Programmieraufgabe benutzen. Darüber hinaus dürfen Sie zum Testen nutzen, dass $\frac{\sqrt{\pi}}{10}$ eine sinnvolle Approximation von (1) ist.

Abgabe bis 14.11.2016

Ansprechpartner Programmieraufgaben: `progtutor@na.uni-tuebingen.de`,
Sprechstunde: Mittwoch, 14-15 Uhr