Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 30.01.2017

13. Übungsblatt zur Numerik

Hinweis:
Für die **Klausurzulassung** müssen **50% der theoretischen Aufgaben** als gelöst angekreuzt sein, d.h. **26 Aufgaben** der 13 Übungsblätter.
Somit können Sie auf diesem Blatt (mit 6 Aufgaben) 2 zusätzliche "Kreuze" bekommen.

Aufgabe 49: Ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung q liefert Näherungswerte y_n und zugehörige Funktionswerte $f(t_n, y_n)$. Um eine Lösung auf dem gesamten Intervall zu bestimmen, kann man auf dem Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ die Lösung durch das Hermite-Polynom mit Randwerten y_n, y_{n+1} und Ableitungswerten $f(t_n, y_n), f(t_{n+1}, y_{n+1})$ approximieren.

Für welche Ordnung q ist der Fehler dieser Näherungslösung auf dem gesamten Integrationsintervall durch $\mathcal{O}(h^q)$ beschränkt ?

Aufgabe 50: Weisen Sie nach, dass das klassische Runge-Kutta-Verfahren die Ordnung 4 hat. (Mit Bäumen oder, wenn Sie viel Zeit und Geduld haben, ohne Bäume.)

Die folgenden Aufgaben sind eine Auswahl aus früheren Klausur-Aufgaben:

Aufgabe 51:

(a) Gegeben sei die Quadraturformel (QF)

$$\int_a^b f(x)\; dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^{3} b_i f(a + c_i(b-a))$$

mit $b_2 = \frac{3}{4}$, $c_1 = 0$ und $c_3 = 1$. Bestimmen Sie die übrigen Parameter, um eine QF maximaler Ordnung zu erhalten.

(b) Zeigen Sie: Für die Gewichte einer QF der Ordnung s mit Knoten $c_1 < \ldots < c_s$, welche $c_i = 1 - c_{s+1-i},\; i = 1, \ldots, s$ erfüllen, gilt $b_i = b_{s+1-i}$ für $i = 1, \ldots, s$.

Aufgabe 52:

Weisen Sie nach, dass es kein Polynom vom Grad höchstens 3 durch die Punkte $P_0 = (-1, -2)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 10)$ und $P_3 = (2, 49)$ mit Steigung 11 am linken Rand $x = -1$ und Steigung -1 am rechten Rand $x = 2$ gibt.
Bestimmen Sie für den kubischen Spline, der die geforderten Bedingungen erfüllt, die Ableitungen in den Punkten P_1 und P_2.

Bitte wenden

Aufgabe 53:

(a) Lösen Sie mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 6 & 10 & -7 \\ -4 & -7 & 14 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei die Cholesky-Zerlegung einer symmetrischen, positiv-definiten Matrix $A = LL^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Formulieren Sie einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Determinante von A.

Aufgabe 54:

Die Vektoren $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$ seien gegeben. Bestimmen Sie eine Householder-Matrix P und $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $Px = \alpha y$ gilt. Geben Sie dann einen Algorithmus in Pseudo-Code (Matlab/Julia) an, der Pz für $z \in \mathbb{R}^n$ effizient berechnet. Bestimmen Sie den Aufwand.
Hinweis: Genaue Matlab-/Julia-Syntax ist nicht nötig. Normen und Skalarprodukte sollen durch `for`-Schleifen realisiert werden.

Besprechung in den Übungen am 07.02.2017

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr