Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 23.01.2017

12. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 45: In dieser Aufgabe wird zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ die implizite Mittelpunktsregel betrachtet:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als implizites Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens.

Aufgabe 46: Zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ verwende man für ein festes $\theta \in [0, 1]$ das θ-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f(y_{n+1}) + (1-\theta)f(y_n)).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Verfahren als Runge–Kutta-Verfahren aufgefasst werden kann. Geben Sie die Runge–Kutta-Koeffizienten an. Wie nennt man die Verfahren für $\theta = 0$ bzw. $\theta = 1$?

(b) Bestimmen Sie die Ordnung des Verfahrens in Abhängigkeit von θ.
Hinweis: Verwenden Sie, dass das Verfahren höchstens Ordnung 2 hat.

Aufgabe 47: Zeigen Sie: Ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i, \quad i = 1, \ldots, s \tag{1}$$

angewandt auf die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ ist äquivalent zu einem Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf das autonome System $z' = F(z)$ mit

$$z = \begin{bmatrix} t \\ y \end{bmatrix}, \quad F(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{bmatrix}.$$

Diskutieren Sie zudem die Voraussetzung (1), indem Sie die innere Stufe Y_i als Näherung von $y(t_0 + c_i h)$ interpretieren.

Aufgabe 48: Auf das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0$$

werde ein explizites Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p mit s Stufen angewandt. Zeigen Sie:

(a) $y_1 = P(h\lambda)y_0$, wobei $P(z)$ ein Polynom vom Grad s ist.

(b) Falls $p = s$, so gilt

$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^p}{p!}.$$

Besprechung in den Übungen am 31.01.2017
Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr