Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 16.01.2017

11. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 41: Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Für $y, z \in D$ gilt

$$\langle f(y) - f(z), y - z \rangle \leq \ell \cdot \|y - z\|^2 \qquad \text{mit } \ell = \sup_{u \in D} \mu\big(f'(u)\big)$$
$$\|f(y) - f(z)\| \leq L \cdot \|y - z\| \qquad \text{mit } L = \sup_{u \in D} \|f'(u)\|,$$

wobei für euklidische Norm und Skalarprodukt und reelle $d \times d$-Matrizen A

$$\mu(A) = \sup_{v \neq 0} \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|^2} = \text{größter Eigenwert von } \frac{1}{2}(A + A^T),$$
$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^T A}.$$

Hinweis: $f(y) - f(z) = \int_0^1 f'(z + t(y - z)) \cdot (y - z)\, dt$ und $\langle Av, v \rangle = \langle \frac{1}{2}(A + A^T)v, v \rangle$.

Aufgabe 42: Es sei die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ gegeben. Aufgrund von Rundungsfehlern berechnet man beim Euler-Verfahren an Stelle von

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

gestörte Werte

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + hf(t_n, \tilde{y}_n) + \delta_n.$$

Es sei $\tilde{y}_0 = y_0$ und es gelte $\|\delta_n\| \leq \delta$. Zeigen Sie: Falls f einer Lipschitzbedingung mit Konstante L genügt, so ist

$$\|\tilde{y}_n - y_n\| \leq M \frac{\delta}{h}$$

mit $M = (e^{L(T - t_0)} - 1)/L$ für $t_n \in [t_0, T]$.
Hinweis: Lady Windermere's Fächer.

Aufgabe 43: Die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 998 & -1998 \\ 999 & -1999 \end{pmatrix}$$

werde mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Zeigen Sie: Die exakte Lösung erfüllt $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0?
Hinweis: Diagonalisierung von A.

Bitte wenden

Aufgabe 44: Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = Ay + g(t,y)$, wobei $\mu(A) \le \ell$ und g eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfülle (vgl. Aufgabe 41). Es werde das *linear-implizite Euler-Verfahren*

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_{n+1} + g(t_n, y_n))$$

betrachtet. Zeigen Sie:

- Falls $\ell + L \le 0$, so gilt für zwei beliebige Lösungen y, z

$$\|y(t) - z(t)\| \le \|y(t_0) - z(t_0)\| \qquad \text{für } t \ge t_0.$$

- Die numerische Lösung zu zwei Anfangswerten y_0, z_0 erfüllt für beliebige Schrittweiten $h > 0$

$$\|y_1 - z_1\| \le \|y_0 - z_0\|,$$

  verhält sich also wie die exakte Lösung.

Besprechung in den Übungen am 24.01.2017
Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr