Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 09.01.2017

10. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 37: Zeigen Sie, dass es in $K = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$ eine Lösung (x^*, y^*) des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y^2 - 3x &= -3, \\ \frac{3}{4}\sin(x) &= y \end{aligned}$$

gibt. Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 38: Zeigen Sie für das gewöhnliche Newton-Verfahren unter den Voraussetzungen des Newton-Mysovskii-Theorems die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \|x_k - x^*\| &\le \alpha \frac{\gamma^{2^k - 1}}{1 - \gamma^{2^k}}, \\ \|x_k - x^*\| &\le \frac{\omega}{2(1-\gamma^{2^k})} \|x_k - x_{k-1}\|^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 39: Es seien $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \le n$. Zeigen Sie:

(a) Falls $v^T M v > 0$ für alle $v \neq 0$ mit $Gv = 0$ und G vollen Rang besitzt, so ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar.

(b) Falls M symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine Zerlegung der Form

$$\begin{bmatrix} M & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ GL^{-T} & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & L^{-1}G^T \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Wieviele Operationen sind zur Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit einer derartigen Matrix nötig?

Hinweis: Cholesky-Zerlegung von M, QR-Zerlegung.

Aufgabe 40: Geben Sie einen effizienten (lokal konvergenten) Algorithmus an zur Lösung des Ausgleichsproblems mit nichtlinearen Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \|Ax - b\| &= \min! \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

Hierbei sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $(m \ge n)$ mit vollem Rang, $b \in \mathbb{R}^m$, die gesuchte Lösung $x \in \mathbb{R}^n$. Die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ mit $l < n$ sei zweimal stetig differenzierbar und $g'(x)$ habe vollen Rang.

Hinweis: Linearisieren Sie die Nebenbedingung in Anlehnung an das Newton- und das Gauß-Newton-Verfahren. Führen Sie dann einen Lagrangemultiplikator λ ein. Aufgabe 39!

Besprechung in den Übungen am 17.01.2017

Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
eberle@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr

Programmieraufgabe 6:

(a) Schreiben Sie eine Funktion $\texttt{exp\_euler}(\texttt{f}, \texttt{x0}, \texttt{t0}, \texttt{t1}, \texttt{tau})$, welche das Anfangswertproblem $x' = \texttt{f}(t, x)$ mit $x(\texttt{t0}) = \texttt{x0}$, mithilfe des expliziten Euler-Verfahren löst. Es soll dabei die Schrittweite `tau` genommen werden bis zur Endzeit `t1`. Geben Sie die Lösung als Rückgabewert zurück.

(b) Analog wie in der ersten Programmieraufgabe sollen Sie weiterhin experimentell die Konvergenzordnung des expliziten Euler-Verfahren bestimmen (lesen Sie sich nochmal die PA1 durch und erstellen Sie Plots wie es dort beschrieben worden ist). Rechnen Sie anhand des Beispiels $\texttt{f}(t, x) = Ax$ mit $A = [4, -1; -1, 4]$, $\texttt{t0} = 0$, $\texttt{t1} = 1$ und $\texttt{x0} = [1; 2]$. Suchen Sie sich mehrere *sinnvolle* `tau` aus. *Hinweis:* Sie dürfen benutzen, dass $\texttt{expm}(A * \texttt{t1})\texttt{x0}$ die exakte Lösung ist.

Abgabe: siehe ILIAS

Ansprechpartner Programmieraufgaben: `progtutor@na.uni-tuebingen.de`,

Sprechstunde: Mittwoch, 13-15 Uhr