Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 17.10.2016

1. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 1: (Landau-Notation)
Für (reelle) Funktionen f und g schreiben wir $f = \mathcal{O}(g)$ für $x \to a$, ($a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), falls es eine Umgebung U von a und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ für alle } x \in U$$

(oder etwas präziser, falls $\limsup_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty$). Anschaulich bedeutet dies, dass die Funktion f in einer Umgebung von a nicht schneller wächst als die Funktion g.

Gegeben seien die Funktionen

$$x^3, \quad \log(x), \quad 2^x, \quad x^2, \quad x^3 + 1000x^2, \quad e^x.$$

Vergleichen Sie das Wachstum dieser Funktionen für $x \to \infty$ und $x \to 0$ mit Hilfe der oben beschriebenen $\mathcal{O}$-Notation.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^4 x^2 e^{-5x} dx$ durch vierfache Verwendung der Simpson-Regel auf äquidistanten Intervallen. Begründen Sie kurz, wie sich bei gleichem Aufwand (gemessen in Funktionsauswertungen des Integranden) der Wert genauer approximieren läßt.

Aufgabe 3: Es seien die Knoten $c_1 = 0$ und $c_3 = 1$ einer Quadraturformel für $s = 3$ vorgegeben. Bestimmen Sie den Knoten c_2 sowie die Gewichte b_1, b_2 und b_3 so, dass die Ordnung der Quadraturformel maximal wird. Wie groß ist die Ordnung Ihrer Quadraturformel?

Aufgabe 4: Zeigen Sie die folgenden Fehlerabschätzungen für die Mittelpunktregel:

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - hf(x_0 + h/2) \right| \leq \frac{h^3}{24} \max_{x\in[x_0,x_0+h]} |f''(x)|.$$

Besprechung in den Übungen am 25.10.2016
Ansprechpartnerin: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 9-10 Uhr

Programmieraufgabe 1:

(a) Schreiben Sie eine Funktion, die die folgende Argumente akzeptiert (Reihenfolge bitte beibehalten): reelle Zahlen `a`, `b`, eine ganze Zahl `N`, eine Funktion

$$\texttt{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

und ein *String* `regel`. Je nachdem welchen Wert `regel` hat, soll das Integral

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

mit der Rechtecksregel, der Trapezregel oder der Simpsonregel approximiert werden. `N` soll dabei die Anzahl der Teilintervallen entsprechen.

(b) Bestimmen Sie den exakten Wert des Integrals

$$\int_0^3 \cos x e^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie danach Approximation für alle in (a) genannten Verfahren für jeweils $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64$. Sei h die Länge des Teilintervalls. Tragen Sie den Logarithmus des Fehlers als Funktion von $\log(h)$ auf. Was beobachten Sie? Können Sie das Verhalten erklären?

Abgabe bis 31.10.2016

Ansprechpartner Programmieraufgaben: `progtutor@na.uni-tuebingen.de`,

Sprechstunde: Mittwoch, 14-15 Uhr