Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 01.12.2010

8. Übungsblatt zur Numerik

Aufgabe 27: Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung LL^T der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 14 \\ 8 & 14 & 29 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (26\ 44\ 80)^T$ und $b = (168\ 290\ 547)^T$ durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution. Sie dürfen die Aufgabe gerne mittels eines Matlab-Programms lösen. Beachten Sie bitte die Programmieraufgabe unten.

Aufgabe 28:

(a) Gegeben sei eine $(n \times n)$–Matrix A mit $\|A\| \leq r < 1$. Zeigen Sie: $I - A$ ist invertierbar, wobei die Inverse durch die Neumannsche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ gegeben ist. Zusätzlich gilt

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - r}.$$

(b) Es sei $A = \frac{1}{h}\text{tridiag}(1, 4, 1)$ die Matrix, die bei der Spline-Interpolation zu äquidistanten Stützstellen auftrat. Zeigen Sie: $\text{cond}_\infty(A) \leq 3$ unabhängig von der Dimension der Matrix A.
Hinweis: Da $\text{cond}(A)$ unabhängig von h ist, können Sie ohne Einschränkung $h = 1$ annehmen. Zerlegen Sie dann $A = 4(I + N)$, und betrachten Sie die Neumannsche Reihe $(I + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-N)^k$, um $\|A^{-1}\|_\infty$ abzuschätzen.

Aufgabe 29: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, daß für die zur Betragssummen- und zur Maximumsnorm gehörenden Matrixnormen gilt:

(a) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)

(b) $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\, \|A\|_\infty$

Aufgabe 30:

Es sei die Cholesky–Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch $A = LL^T$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für $i = 1, \ldots, n$ gilt $\|L\|_2^2 = \max\limits_{\mathbf{x} \neq 0} \dfrac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \geq l_{ii}^2.$

(b) Für $i = 1, \ldots, n$ gilt $l_{ii}^2 \geq \min\limits_{\mathbf{x} \neq 0} \dfrac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \dfrac{1}{\|L^{-1}\|_2^2}.$

(c) Für die Konditionszahl $\text{cond}_2(L) = \|L\|_2\, \|L^{-1}\|_2$ gilt $\text{cond}_2(L) \geq \max\limits_{1 \leq i,k \leq n} \left|\dfrac{l_{ii}}{l_{kk}}\right|$

Programmieraufgabe 7: Schreiben Sie eine Funktion `lr_zerlegung` (Eingabe: A, Ausgabe: L, R), welche zu einer vorgegebenen invertierbaren Matrix A die Matrizen L und R der LR-Zerlegung berechnet, wobei sie davon ausgehen dürfen, dass die Zerlegung ohne Zeilentausch durchführbar ist. Realisieren Sie zudem Funktionen `vorwaerts_sub` (Eingabe: L, b, Ausgabe: c) und `rueckwaerts_sub` (Eingabe: R, c, Ausgabe: x), die für untere (L) bzw. obere Dreiecksmatrizen (R) bei vorgegebener rechter Seite (b bzw. c), die Lösung des Gleichungssystems $Lc = b$ bzw. $Rx = c$ liefert.

Testen Sie Ihr Programm für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 14 & 25 \end{pmatrix},$$

und rechte Seiten

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 32 \\ 67 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 61 \\ 229 \\ 487 \end{pmatrix}$$

in einem Programm `p07`.

Freiwilliger Zusatz zu Aufgabe 27: Schreiben Sie eine Funktion `Cholesky`, welche die Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix A berechnet, und testen Sie die Funktion mit den Daten aus Aufgabe 27.

Besprechung in den Übungen am 08.12.2010
Abgabe der Programmieraufgabe bis zum 14.12.2010
Klausurtermin: Montag, der 31.01.2011, von 16-18 Uhr