

### 3. Übungsblatt zur Numerik

**Aufgabe 8:** Bestimmen Sie das Interpolationspolynom  $p(x)$  zweiten Grades einer Funktion  $f$  zu den Daten

$$\begin{array}{c|ccc} x_j & t & t+h/2 & t+h \\ \hline y_j & f(t) & f(t+h/2) & f(t+h) \end{array} \quad t \in \mathbb{R}, h > 0$$

in Abhängigkeit von der Stelle  $t$  und der Schrittweite  $h$ .

Zeigen Sie weiter:

Integriert man dieses Polynom von  $t$  bis  $t+h$ , so erhält man die Simpsonregel auf  $[t, t+h]$ , also:

$$\int_t^{t+h} p(x) dx = h \left( \frac{1}{6}f(t) + \frac{2}{3}f(t+h/2) + \frac{1}{6}f(t+h) \right).$$

**Aufgabe 9:** Eine Folge  $\{S_n\}$  erfülle

$$S_{n+1} - S = \rho_n(S_n - S) \quad \text{mit } \rho_n \rightarrow \rho, \quad \rho \neq 1.$$

Zeigen Sie, dass die durch die Aitken'sche  $\Delta^2$ -Regel erhaltene Folge  $\{S'_n\}$  schneller als die ursprüngliche Folge gegen  $S$  konvergiert, d. h.

$$\frac{S'_n - S}{S_n - S} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Folge  $\{S'_n\}$  kann gegen  $S$  konvergieren, ohne dass  $\{S_n\}$  konvergiert.

**Aufgabe 10:** Gegeben sei die Wertetabelle

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline y_i & 8 & 3 & 4 & 8 \end{array}.$$

- (a) Man bestimme mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades durch die obigen Wertepaare.
- (b) Man interpoliere die Wertetabelle nach der Interpolationsformel von Newton.
- (c) Es seien  $(x_4, y_4) = (2, 1)$ .

Wie lautet das Newtonsche Interpolationspolynom unter Hinzunahme des Punktes  $(x_4, y_4)$ ?

**Aufgabe 11:**

Zeigen Sie die folgende Fehlerabschätzung für die Trapezregel:

$$\left| \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx}_{=I(f)} - \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_0+h)) \right| \leq \frac{h^3}{12} \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f''(x)|,$$

indem Sie  $\frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_0+h)) = I(\hat{f})$  als Integral über eine  $f$  interpolierende Funktion  $\hat{f}$  interpretieren und die Restglieddarstellung der Polynominterpolation investieren.

**Besprechung in den Übungen am 03.11.2010**